

**Abgabe** am 9. Februar 2018 bis 10 Uhr in die jeweiligen Tutorenfächer

Dies ist das letzte Aufgabenblatt.

**Aufgabe 1** Finden von Senken in Graphen

10 Punkte

Betrachtet man die Adjazenzmatrixdarstellung eines Graphen  $G = (V, E)$ , dann haben viele Algorithmen Laufzeit  $\Omega(|V|^2)$ . Es gibt aber Ausnahmen: Zeigen Sie, dass die Frage, ob ein gerichteter Graph  $G$  eine *globale Senke* — einen Knoten vom Ingrad  $|V| - 1$  und Ausgrad 0 — hat, in Zeit  $O(|V|)$  beantwortet werden kann, selbst wenn man die Adjazenzmatrixdarstellung von  $G$  (die ja selbst schon die Größe  $\Theta(|V|^2)$  hat) verwendet. Beweisen Sie Korrektheit und Laufzeit Ihres Algorithmus.

*Hinweis:* Sei  $A$  die Adjazenzmatrix von  $G$  und  $u \neq v \in V$ . Was folgt über  $u$  und  $v$ , wenn  $A_{uv} = 1$  ist? Was, wenn  $A_{uv} = 0$  ist?

**Aufgabe 2** Kürzeste Wege in DAGs

10 Punkte

Sei  $G = (V, E)$  ein gewichteter gerichteter azyklischer Graph. Seien  $s, t \in V$ . Geben Sie einen Algorithmus, der einen kürzesten Weg von  $s$  nach  $t$  in Zeit  $O(|V| + |E|)$  berechnet. Beweisen Sie die Korrektheit und die Laufzeit Ihres Algorithmus.

*Hinweis:* Beachten Sie Aufgabe 3(b) auf dem 13. Übungszettel und verwenden Sie dynamisches Programmieren.

**Aufgabe 3**  $A^*$ -Suche

10 Punkte

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter, gewichteter Graph mit nichtnegativen Kantengewichten. Seien  $t \in V$  und sei  $h : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  eine Funktion mit  $h(t) = 0$ . Wir nennen  $h$  *konsistent*, falls für alle Kanten  $e = (u, v) \in E$  gilt:

$$h(u) \leq h(v) + w_e,$$

wobei  $w_e$  das Gewicht der Kante  $e$  bezeichnet.

Zeigen Sie: Wenn  $h$  konsistent ist, dann ist  $h(v) \leq d_G(v, t)$  für alle  $v \in V$ . Hierbei bezeichnet  $d_G(\cdot, \cdot)$  den kürzeste-Wege-Abstand in  $G$ . Gilt auch die Umkehrung?

*Hinweis:* Bitte formatieren Sie Ihre Abgaben mit  $\text{\LaTeX}$  oder einem vergleichbaren elektronischen Textverarbeitungssystem. Ansonsten droht der Abzug von bis zu 10% der erreichbaren Punkte.