

Aufgabe 1 Rekursionsgleichungen

10 Punkte

Lösen Sie die folgenden Rekursionsgleichungen. Beweisen Sie jeweils die Richtigkeit Ihrer Lösung (z.B. durch vollständige Induktion).

(a)

$$T(1) = 0; \quad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n, \text{ für } n > 1.$$

Sie dürfen annehmen, dass n eine Zweierpotenz ist.

(b)

$$S(1) = 1; \quad S(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot S(i), \text{ für } n > 1.$$

Aufgabe 2 Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel 10 Punkte

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$P(n) : x_1 x_2 \dots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right)^n,$$

indem Sie folgende Teilschritte bearbeiten:

(a) $P(2)$ ist eine wahre Aussage.

Hinweis: $(x_1 - x_2)^2 \geq 0$.

(b) Wenn $P(n)$ gilt, dann gilt auch $P(n-1)$.

Hinweis: Wie muss man x_n wählen, damit sich der Wert der rechten Klammer nicht ändert, wenn x_1, \dots, x_{n-1} schon feststehen?

(c) Aus $P(2)$ und $P(n)$ folgt $P(2n)$.

(d) Folgern Sie nun die Ungleichung.

Aufgabe 3 Manipulation elementarer Funktionen

10 Punkte

Finden Sie Paare von äquivalenten Termen und formen Sie diese schrittweise ineinander um. Geben Sie die verwendeten Regeln an.

$$\log_a \left(n^{\log_b a} \right), \sqrt[b]{\frac{a^n}{a^m}}, b^{n \log a}, \log_b n, a^{\frac{n-m}{b}}, n(\log a + \log b), \log(a^n b^n), a^{(\log b^n)}.$$