LINDENMAYER SYSTEME   Astrid Koennecke

Geschichte:
Ein Lindenmayer System (L-System) ist ein mathematischer Formalismus, der im Jahr 1968 von dem theoretischen Biologen Aristid Lindenmayer als Grundlage einer axiomatischen Theorie biologischer Entwicklung vorgeschlagen wurde. Ursprünglich wurden Lindenmayer Systeme in der Computergraphik zur Erzeugung von Fraktalen und für die Modellierung von Pflanzen verwendet.

Grundidee:

Lindenmayer Systeme basieren auf dem Prinzip der Ersetzungssysteme. Die Grundidee von Ersetzungssystemen ist, komplexe Objekte durch Substitution einfacher Objekte mit Hilfe von Produktionsregeln zu definieren. Bei den sogenannten Chomsky Grammatiken (reguläre, kontextfreie, kontextsensitive und rekursiv aufzählbare Grammatiken) ist das Ersetzungsverfahren sequentiell, d.h. die Produktionen werden einzeln und der Reihe nach angewandt. Bei Lindenmayer Systemen werden die Produktionsregeln gleichzeitig und parallel auf alle Symbole angewandt.

Definition (0L-System):
Ein kontextfreies L-System (0L-System) ist ein 3-Tupel $G=(V,w,P)$, wobei
V :Alphabet des Systems bezeichnet.
$w\in V^+$: ein nicht leeres Wort über dem Alphabet, das Axiom des Systems genannt wird.
$P\subset V\times V^*$ eine endliche Menge von Produktionen ist.
(a,α) ist eine Produktion $\Leftrightarrow$ $a\to\alpha$ gilt. Wir nennen das Zeichen a der Vorgänger (Predecessor) und das Wort $\alpha\in V^*$ der Nachfolger (Successor) der Produktion. Wie nehmen an, dass für alle $a\in V$, mindestens ein $x\in V^*$ existiert so dass, $a\to\alpha$. Wird für ein $a\in V$ keine Produktionsregel explizit angegeben, dann nehmen wir an, dass die Identitätsproduktion $a\to a$ zur Menge der Produktionen P gehört.
Das L-System heißt deterministisch (D0L-System)wenn $\forall a\in V$ genau ein $\alpha\in V^*$ existiert, so dass $a\to\alpha$ gilt.

Definition (Ableitung):
Sei $\mu=a_1a_2\ldots a_m\in V$ beliebig. Wir sagen $\nu=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\in V^*$ wird von μ direkt abgeleitet $\mu\Rightarrow\nu$ genau dann wenn $a_i\to\alpha_i$ $\forall i=1\ldots m$.
Ein Wort μ wird von G in n Schritten abgeleitet, wenn es eine Reihe von Wörtern $\mu_0\mu_1\ldots\mu_n$ gibt, so dass $\mu_0=w,\mu_n=\nu$ und $\mu_0=w\Rightarrow\mu_1\Rightarrow\ldots\Rightarrow\mu_n=\nu$

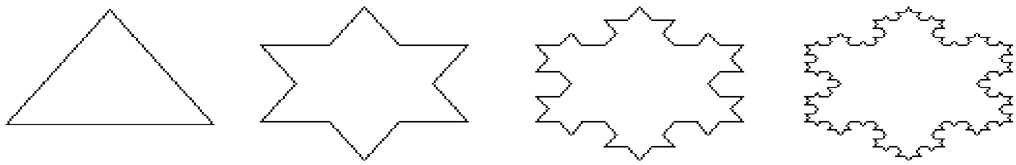
Beispiele:
1. $G=(V,w,P)$ mit
$V=\{a,b\}$, $w=a$ und $P=\{a\to ab, b\to a\}$
ist ein deterministisches 0L-System
2. In folgendem Beispiel betrachten wir ein L- System zur Simulation des Zellenwachstums der Bakterie *Anebaena catenula*. Die Symbole a und b repräsentieren in welchem Wachstumsstatus eine Zelle sich befindet, und die Indizes l und r , die Polarität der Zelle, die beschreiben in welcher Position die Tochterzellen produziert werden.
$G=(V,w,P)$ mit, $V=\{a_r,a_l,b_l,b_r\}$ $w=a_r$ und die Produktionen:

$$a_r\to a_lb_r$$
$$a_l\to b_la_r$$
$$b_r\to a_r$$
$$b_l\to a_l$$

$$a_r$$
$$a_lb_r$$
$$b_la_ra_r$$
$$a_la_lb_ra_lb_r$$
$$b_la_rb_la_ra_rb_la_ra_r$$
$$a_la_lb_ra_la_lb_ra_lb_ra_ra_lb_ra_lb_r$$

Lindenmayer zur Generation von Fraktalen und Schildkröte Interpretation

Fraktalen sind natürliche oder künstliche Gebilde, oder geometrische Muster, die einen hohen Grad von Selbstähnlichkeit aufweisen. Unter Selbstähnlichkeit verstehen wir die Wiederholung einer bestimmten Struktur in sich selbst.
Klassisches Beispiel für ein solches Gebilde ist die Schneeflocke, im Jahr 1905 von Koch vorgestellte Kurve.
Die Kochsche Kurve ist in der einfachsten Form ein gleichseitiges Dreieck (Initiator) . Jede Seite wird nun gedrittelt und über den Mittelstück ein gleichseitiges Dreieck nach außen angesetzt (Generator).



LOGO-Schildkröte Interpretation von Strings (Szilard und Quinton):

Wir definieren der Zustand der Schildkröte mit einem 3-Tupel (x, y, α) , wobei die Kartesischen Koordinaten (x, y) die Position und der Winkel α die Richtung der Schildkröte angeben. Sind die Schrittlänge d und die Winkelerhöhung δ angegeben, können wir die Befehle wie folgt repräsentieren:

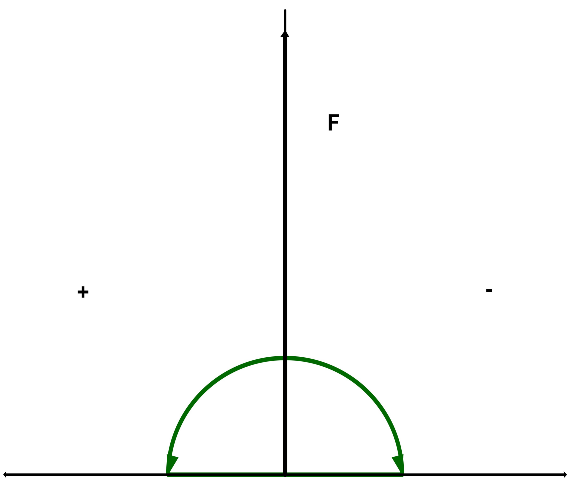
F : mache einen Schritt der Länge d . Der Zustand der Schildkröte ändert sich von (x, y, α) zu $(x', y'\alpha)$, wobei $x' = x + d\cos(\alpha)$ und $y' = y + d\sin(\alpha)$. Man zeichnet die Strecke zwischen (x, y) und (x', y')

f : mache einen Schritt der Länge d ohne die Strecke zu zeichnen.

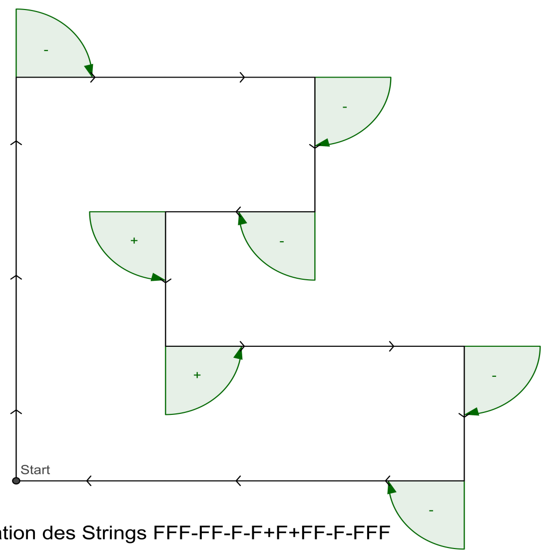
$+$: drehe dich links um den Winkel δ . Der Zustand der Schildkröte ändert sich von (x, y, α) zu $(x, y, \alpha+\delta)$. Positive Winkelorientierung ist gegen die Uhrzeigerichtung.

$-$: drehe dich rechts um den Winkel δ . Der Zustand der Schildkröte ändert sich von (x, y, α) zu $(x, y, \alpha-\delta)$

Die Schildkröte Interpretation von einen String ν , mit gegebenem Anfangszustand der Schildkröte $(x_{0,} y_{0,} \alpha_0)$ und feste Parameter d und δ , ist die Zeichnung, die durch die in dem String angegebenen Befehle entsteht.
Man kann diese Methode anwenden, um Strings, die durch ein L-System generiert werden, graphisch zu interpretieren.



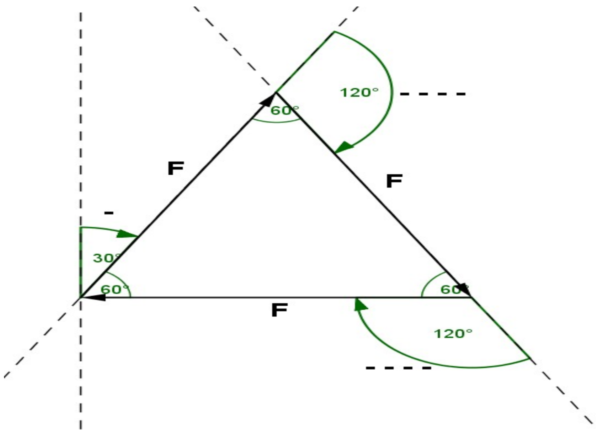
Interpretation der Symbole F, + und -



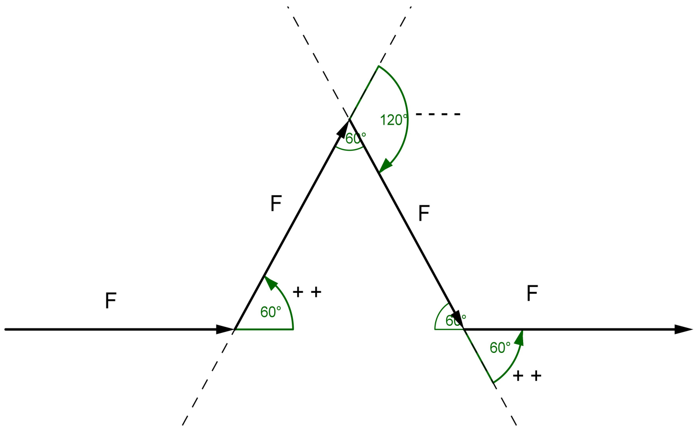
Interpretation des Strings FFF-FF-F-F+F+FF-F-FFF
δ= 90°

Koch-Kurve

Der Initiator entspricht das Axiom $w = -F----F----F$ des L-Systems.



Der Generator entspricht die Produktion $F \rightarrow F++F----F++F$ des L-Systems



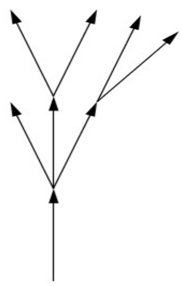
Die Streckenlänge d wird in jedem Schritt dreimal verkleinert, so dass der Abstand zwischen den Endpunkten im Nachfolger gleich dem Abstand zwischen den Endpunkten im Vorgänger ist.

Definition (Geklammerte L-Systeme)

Mit den vorgestellten Befehlen sind durch die Schildkröte Interpretation eines Strings nur Streckenzüge möglich (das Ende einer Strecke ist mit dem Kopf der nächsten Strecke verbunden). Um auch Verzweigungen darstellen zu können, wie es in Pflanzen häufig vorkommt, hat Lindenmayer eine Notation mit Klammern für die Repräsentation von graphischen Bäumen vorgeschlagen, die die Schildkröte Interpretation von Strings erweitert.

[Lege den aktuellen Zustand der Schildkröte auf den Stack ab

] Hole das Oberste Element vom Zustandsstack und mache es zum aktuellen Zustand der Schildkröte. Die Schildkröte bewegt sich in diesem Zustand, ohne eine Linie zu zeichnen.

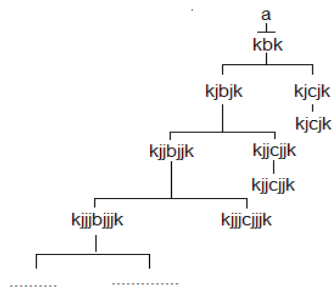


Interpretation des Strings: F[+F][-F[-F]F[+F][-F]

Definition (Erwachsene Strukturen von L-Systeme)

Wie schon erwähnt sind L-Systeme ein Formalismus um das kontinuierliche Wachstum von Pflanzen zu simulieren. Es gibt aber Organe von Pflanzen die eine Adultphase erreichen, wie zum Beispiel Blätter und Blumen.
Eine erwachsene Struktur ist eine Struktur die global gleich bleibt aber sich innerlich verändert oder regeneriert. Solche Strukturen lassen sich auch mit Hilfe von L-Systeme produzieren. Wie betrachten folgendes Beispiel.

$G=(V,w,P)$, $V=\{a,b,c,j,k\}$, $w=a$ und die Produktionen:
$a \rightarrow kbk, b \rightarrow jcj, c \rightarrow c, j \rightarrow j, k \rightarrow k$



Definition (Stochastische L-Systeme)

Alle Pflanzen, die mit demselben deterministischen L-System erzeugt wurden, sind identisch. Um eine in der Natur nicht vorkommende Gleichmäßigkeit zu vermeiden, müssen zwischen den einzelnen Pflanzen Abweichungen eingeführt werden, welche Einzelheiten verändern, das allgemeine Aussehen einer Pflanzenart aber beibehalten.

Ein stochastisches L-System ist ein geordnetes 4-Tupel $G_\pi=(V,w,P,\pi)$, wobei das Alphabet V , das Axiom w und die Produktionen P wie vorher definiert werden. Die Funktion $\pi : P \rightarrow [0,1]$, wahrscheinliche Distribution genannt, ordnet jede Produktion ein Wahrscheinlichkeit, wobei $\forall a \in V, \sum_{x_i \in V^*} \pi((a, x_i))=1$, dh: die Summe aller Wahrscheinlichkeiten zu einem Vorgänger a eins sein muss.

Bsp:

$w=F$
$p_1 : F \rightarrow_{0.33} F[+F]F[-F]F$
$p_2 : F \rightarrow_{0.33} F[+F]F$
$p_3 : F \rightarrow_{0.34} F[-F]F$

Definition (Kontextsensitive L-Systeme)

Durch Berücksichtigung des Kontextes erhält man kontextsensitive L-Systeme. Die allgemeinste Form sind die IL-Systeme, in denen bei jeder Produktion auch die Zeichen oder Zeichenfolge rechts oder links dem zu ersetzenden Zeichen betrachtet wird. Bei 2L-Systeme wird der Kontext auf beiden Seiten betrachtet (also Links UND Rechts). Die Produktionen haben die Form:
$a_l < a > a_r \rightarrow \alpha$, wobei a_l der linken und a_r der rechte Kontext bezeichnen.

Hogeweg und Hesper führten 1974 eine umfangreiche Versuchsreihe durch, bei der 3584 Modelle aus geklammerten 2L-Systeme über dem Alphabet {0,1} erzeugt wurden. Einige von diesen lieferten ein pflanzenähnliches Aussehen, jedoch wurde kein Verfahren gefunden, aus kontextsensitiven L-Systemen gezielt pflanzenähnliche Strukturen zu generieren.

Bibliographie:

Przemyslaw Prusinkiewicz, Aristid Lindenmayer: The Algorithmic Beauty of Plants. Springer Verlag New York u. a. 1990, ISBN 3-540-97297-8

Przemyslaw Prusinkiewicz, James Hanan: Lindenmayer Systems, Fractals, and Plants, Springer Verlag New York u. a. 1989, ISBN 3-540-97092-4

G. Rozenberg, A.Salomaa: Lindemayer Systems, Impacts on Theorical Computer Science, Computer Graphics and Developmental Biology, Springer Verlag Berlin Heidelberg u.a. 1992, ISBN 3-540-55320-7

G. Ronzenberg, A. Salomaa: The Mathematical Theory of L Systems, Academic Press, London 1980, ISBN 0-12-597140-0

Arne Böttcher: Grundlagen der Lindenmayer Systeme (2001), in: Das Lernprogramm Lily, URL: http://olli.informatik.uni-oldenburg.de/lily/LP/start.html (Stand: 07.11.2010)

Lindenmayer-System, in Wikipedia URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Lindenmayer-System (Stand: 07.11.2010)