4. Übung	Informatik A	WS 07/08

Klaus Kriegel **Abgabe: 20.11.2007, 12:00 Uhr**

Aufgabe 1: **Vollständige Signaturen** (8 Punkte)

Welche der folgenden logischen Signaturen sind vollständig? Zur Begründung positiver Antworten reicht es zu zeigen, dass sich alle Operationen einer bekannten vollständigen Signatur durch die Operationen der Signatur aus der Aufgabenstellung simulieren lassen. Negative Antworten werden in der Regel durch Beispiele von Funktionen begründet, die man mit der Signatur nicht darstellen kann. Das Finden eines geeigneten Beispiels wird schon als erster Lösungsschritt bewertet, aber zu einer kompletten Lösung gehört natürlich auch eine Begründung. Sie können alle in der Vorlesung gezeigten Fakten verwenden und auf die dort bewiesenen Unvollständigkeitsargumente zurückgreifen.

a) $\Sigma_1 = \{\rightarrow\}$
b) $\Sigma_2 = \{false, \rightarrow\}$
c) $\Sigma_3 = \{true, \rightarrow\}$
d) $\Sigma_4 = \{false, \leftrightarrow\}$

Aufgabe 2: **Quantoren** (6 Punkte)

Viele aus der Schulmathematik bekannte Definitionen lassen sich durch quantifizierte Formeln beschreiben, z.B. wird die Konvergenz einer Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert a durch die Formel

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \; (n \geq n_0 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Setzt man vor diese Formel noch ein $\exists a \in \mathbb{R}$, so erhält man die Definition dafür, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

a) Entwerfen Sie **möglichst einfache** Formeln dafür, dass eine Folge$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert (d.h. keinen endlichen Grenzwert hat) und dafür dass zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht den gleichen Grenzwert haben (das schließt den Fall ein, dass eine oder beide Folgen divergieren).

b) Bezeichne P die Menge aller Punkte in der Ebene und G die Menge aller Geraden in der Ebene. Für alle Punkte $p, p' \in P$ und jede Gerade $g \in G$ können Sie die Prädikate $Eq(p, p')$ und $On(p, g)$ verwenden, die genau dann 1 werden wenn p gleich p' ist bzw. wenn p auf der Geraden g liegt. Prädikate zur Gleichheit von zwei Geraden sollen nicht verwendet werden. Beschreiben Sie mit diesen Prädikaten durch **möglichst einfache** quantifizierte Formeln die folgenden Sachverhalte:
i) g und g' sind zwei verschiedene Geraden, die sich schneiden
ii) die Punkte p_1, p_2 und p_3 liegen nicht auf einer Geraden
iii) die Geraden g_1, g_2 und g_3 sind paarweise verschieden und schneiden sich (paarweise) in drei verschiedenen Punkten.

weiter auf Seite 2

Aufgabe 3: **Resolutionskalkül** (5 Punkte)

Lösen Sie die folgenden zwei Fragen durch Verwendung des Resolutionskakülls.
a) Ist der folgende Term erfüllbar?

$$(x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge x_2 \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$$

b) Ist der folgende Term eine Tautologie?

$$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee \neg x_1 \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge \neg x_3)$$