14. und letztes Aufgabenblatt vom Freitag, den 02. Februar 2007 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Frank Hoffmann)

Abgabe bis Mittwoch, den 14. Februar 2007 bis $13^{\underline{00}}$

1. **Resolution I** (3 Punkte)
   Zeigen Sie mittels Resolutionsmethode, dass $x \wedge y \wedge z$ eine Folgerung ist aus der Klauselmenge
   $$F = \{\{\neg x, y\}, \{\neg y, z\}, \{x, \neg z\}, \{x, y, z\}\}$$

2. **Resolution II** (3 Punkte)
   Sei t die Formel
   $$t = (a \wedge \neg c \wedge d) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge d) \vee (a \wedge \neg d) \vee \neg a$$
   Zeigen Sie mit dem Resolutionsverfahren, dass t Tautologie ist. Stellen Sie den Resolutionsbeweis graphisch dar!

3. **Resolution III** (4 Punkte)
   Lösen Sie auch die folgenden zwei Fragen durch Verwendung des Resolutionskalküls.
   a) Ist der folgende Term erfüllbar?
   $$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \neg x_3$$
   b) Ist der folgende Term eine Tautologie?
   $$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_3) \vee \neg x_2$$

4. **Bäume** (4 Zusatzpunkte)
   (a) Beweisen Sie, dass in einem Baum mit n Knoten die Summe der Knotengrade gleich $2n - 2$ ist.
   (b) Beweisen Sie induktiv, dass es für positive ganze Zahlen $d_1, \ldots, d_n$, deren Summe gleich $2n - 2$ ist, immer einen Baum auf n Knoten existiert, deren Knotengrade genau diese Zahlen d_1 bis d_n sind.
   Tipp: Beginnen Sie bei $n = 2$. Wie sehen da d_1 und d_2 aus? Und bei $n > 2$ muss es bei den Zahlen welche geben, die gleich 1 sind und welche, die > 1 sind. Warum?

5. **Graphen** (4 Zusatzpunkte)
   (a) Sei G ungerichteter Graph. Zeigen Sie, dass der Komplementgraph G^c zusammenhängend ist, falls G nicht zusammenhängend ist.
   (b) Sei G ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit durchschnittlichem Knotengrad > 2. Zeigen Sie, dass G dann mindestens zwei Kreise hat.