13. Aufgabenblatt vom Freitag, den 26. Januar 2007 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Frank Hoffmann)

Abgabe bis Mittwoch, den 07. Februar 2007 bis $13^{\underline{00}}$

1. **Richtig oder falsch ?** (1 Punkt)
   Es gibt einen ungerichteten Graphen (ohne Doppelkanten) mit 12 Knoten, 66 Kanten und 3 Zusammenhangskomponenten. Begründung!

2. **Graphen färben** (3 Punkte)
   Beweisen Sie, dass man die Knoten eines ungerichteten Graphen mit Maximalgrad k so mit höchstens $k+1$ Farben färben kann, dass adjazente Knoten immer verschiedene Farben bekommen.

3. **Längste Wege** (3 Punkte)
   Zeigen Sie mit einem indirekten Beweis, dass in einem zusammenhängenden ungerichteten Graphen je zwei längste Wege einen gemeinsamen Knoten haben.

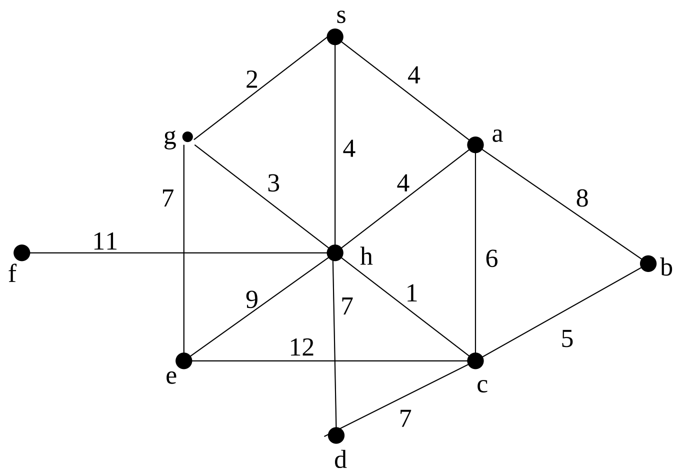
4. **Turnier–Champion** (4 Punkte)
   Ein Turnier auf n Knoten ist ein gerichteter Graph, der dadurch entsteht, dass man den ungerichteten Kanten des vollständigen Graphen K_n Richtungen zuweist. Wir interpretieren die Richtung $v \to w$ als Spieler v schlägt Spieler w. Außerdem sagen wir, dass v den Spieler w dominiert, falls er ihn schlägt oder es einen Spieler z gibt, so dass $v \to z$ und $z \to w$ Kanten im Turnier sind. Ein Spieler heißt Champion, falls er jeden anderen Spieler dominiert.
   Beweisen Sie, dass jedes Turnier mit $n \geq 1$ Spielern wenigstens einen Champion

5. **Minimum Spanning Tree** (3+3+3 Punkte)
   Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit einer Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}^+$.

   (a) Angenommen, alle Kantengewichte sind verschieden und sei C ein Kreis in G. Zeigen Sie, dass die schwerste Kante e in C zu keinem MST von G gehört. Tipp: Es bietet sich ein indirekter Beweis an.

   (b) Argumentieren Sie, dass der folgende Reverse–Delete–Algorithmus einen MST produziert. Wir sortieren die Kanten nach absteigendem(!) Gewicht. In dieser Reihenfolge werden die Kanten aus dem Graphen G gestrichen, falls so eine Delete–Operation den Graphen nicht unzusammenhängend macht.

   (c) Demonstrieren Sie die Arbeitsweise von Prims (Start in s), Kruskals und dem Reverse–Delete–Algorithmus anhand des folgenden Graphen.



s
g
a
b
f
h
e
c
d
2
4
4
3
4
7
8
11
6
9
1
7
12
5
7