7. Aufgabenblatt vom Freitag, den 01. Dezember 2006 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 13. Dezember 2006 bis $13^{\underline{00}}$

1. **Binomischer Satz** (6 Punkte)

   (a) Beweisen Sie den binomischen Satz mit vollstädiger Induktion!

   (b) Benutzen Sie den binomischen Satz, um die folgende Identität zu beweisen:

   $$2^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 3^{n-k}$$

   Werten Sie diese Gleichung für $n = 4$ explizit aus.

2. **Identitäten** (4 Punkte)

   (a) Geben Sie ein kombinatorisches Argument an, dass die folgende Identität gilt:

   $$\binom{2n}{2} = 2 \cdot \binom{n}{2} + n^2$$

   (b) Beweisen Sie:

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

3. **Abzählen I** (2 Punkte) Ein Dozent vergibt insgesamt 90 Punkte für 12 Fragen, für jede Frage mindestens 4 Punkte. Wieviele Punktverteilungen sind möglich?

4. **Abzählen II** (2 Punkte) Wieviele verschiedene Lösungen hat die Gleichung:

   $$x + y + z + w = 18 \quad \text{mit} \quad x, y, z, w \in \mathbb{N}$$

5. **Poker und Bridge** (6 Punkte)
   Beim Poker hat man 5 von 52 Karten in der Hand, ein sogenanntes Blatt. Beim Bridge gibt es 4 Spieler Nord, Ost, Süd und West mit je 13 Karten.

   (a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, dass im Poker–Blatt genau 4 Karten von der gleichen Farbe sind?

   (b) Wie oft gibt es ein Blatt mit einem Full House beim Poker, das heißt, es enthält drei Karten verschiedener Farbe mit identischem Wert (z.B. 3 Asse), plus zwei andere Karten mit gleichem Wert (z.B. 2 Sieben)?

   (c) Wieviele verschiedene Ausgangssituationen gibt es beim Bridge?