5. Aufgabenblatt vom Freitag, den 17. November 2006 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 29. November 2006 bis $13^{\underline{00}}$

1. **Kontraposition** (2 Punkte) Beweisen Sie die folgende Aussage durch Kontraposition: Sei (mindestens) eine von zwei ganzen Zahlen n und m nicht durch 3 teilbar, dann ist auch die Summe oder die Differenz von n und m nicht durch 3 teilbar.

2. **Fibonacci** (9 Punkte) Sie kennen die Foge der Fibonacci–Zahlen, definiert durch $F_0 = F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n > 1$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten.

   (a) $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ für $n \geq 0$

   (b) $F_0 + F_2 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1}$ für $n \geq 0$

   (c) F_{3n} und F_{3n+1} sind ungerade, F_{3n+2} ist gerade für $n \geq 0$

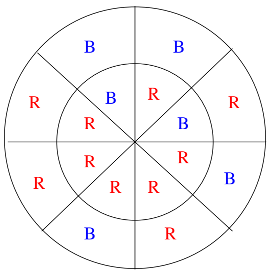
3. **Geschlossene Form** (3 Punkte) Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $a_0 = a_1 = 1$ und $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ für $n \geq 2$.
   Beweisen Sie: $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2}(-1)^n$ für alle n.

4. **Schubfach–Prinzip I** (3+3 Punkte)

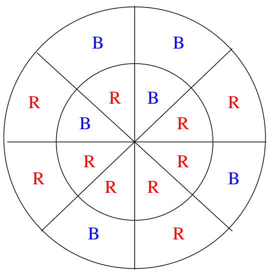
   (a) Ins Innere eines gleichseitigen Dreiecks ABC mit Seitenlänge 1 werden 5 Punkte gezeichnet. Beweisen Sie, dass darunter ein Punktepaar ist mit Abstand $< 1/2$.

   (b) Gegeben seien $m \geq 1$ ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Zeigen Sie, dass es Indizes $0 \leq k < l \leq m$ gibt, so dass die Summe $a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_l$ ohne Rest durch m teilbar ist.

5. **Schubfach–Prinzip II** (4 Zusatzpunkte) Wir haben ein Glücksrad bestehend aus zwei konzentrischen Kreisscheiben, die beide in $2n$ Sektoren unterteilt sind. Bei der großen Scheibe gibt es n blaue und n rote Sektoren, bei der kleinen sind die Sektoren auch rot oder blau, wir wissen aber nichts über die Anzahlen. Die kleine Scheibe kann gedreht werden. Beweisen Sie, dass man sie so drehen kann, dass es wenigstens n Übereinstimmungen bei den Farben sich gegenüberliegender Sektoren gibt.
   Wenn bei der kleinen Scheibe alle rot sind, braucht man z.B. gar nicht zu drehen. Hier ist ein Beispiel mit $n = 4$



3 Übereinstimmungen



4 Übereinstimmungen