4. Aufgabenblatt vom Freitag, den 10. November 2006 zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker I

(Frank Hoffmann)

Abgabe am Mittwoch, den 22. November 2006 bis $13^{\underline{00}}$

1. **Relationen und Funktionen** (4 Punkte)
In der folgenden Tabelle sind 15 Relationen $R \subseteq A \times A$ dargestellt, die sich durch Kombination von 5 definierenden Aussageformen und 3 Zahlbereichen für A ergeben ($\mathbb{N}$ – die natürlichen Zahlen mit 0, $\mathbb{Q}$ – die rationalen Zahlen und $\mathbb{R}^+$ – die positiven reellen Zahlen ohne Null). Man untersuche welche dieser Relationen Funktionen sind und wenn ja, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Dazu können folgende Symbole benutzt werden:

b falls die Relation eine bijektive Funktion von A auf A ist
i falls die Relation eine injektive Funktion von A in A, aber nicht bijektiv ist
s falls die Relation eine surjektive Funktion von A auf A, aber nicht bijektiv ist
f falls die Relation eine Funktion von A in A, aber weder injektiv noch surjektiv ist
$\times$ falls die Relation keine Funktion von A in A ist

definierende Aussageform	$A = \mathbb{N}$	$A = \mathbb{Q}$	$A = \mathbb{R}^+$
$\{(x,y) \in A \times A \mid \frac{y}{x+1} = 3\}$			
$\{(x,y) \in A \times A \mid \frac{x}{y+1} = 3\}$			
$\{(x,y) \in A \times A \mid x^2 - y - 2 = 0\}$			
$\{(x,y) \in A \times A \mid x - y^2 + 2 = 0\}$			
$\{(x,y) \in A \times A \mid x^2 - y^2 = 0\}$			

2. **Funktionen** (6 Punkte)
Sei $f : A \to B$ eine beliebige Funktion, A_1, A_2 Teilmengen von A. Beweisen sie:
   (a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
   (b) $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$
   (c) $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$. Finden Sie ein Beispiel, bei dem eine echte Inklusion auftritt.

3. **Injektiv-Surjektiv** (4 Punkte)
   Sei $f : A \to B$ eine beliebige Funktion. Wir definieren eine neue Funktion $g : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$. Für $N \subseteq B$ sei $g(N) = f^{-1}(N)$. Beweisen Sie, dass f surjektiv ist genau dann, wenn g injektiv ist.

4. **Bijektion** (2 Punkte)
   Zeigen sie, dass die Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = (1/2 - x)/(x(1-x))$ eine Bijektion ist.

5. **0–1–Sequenzen** (4 Punkte)

   (a) Zeigen Sie, dass die Menge aller endlichen 0–1–Sequenzen abzählbar unendlich ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die Menge aller unendlichen 0–1–Sequenzen gleichmächtig mit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist, also überabzählbar unendlich ist.