13. Aufgabenblatt vom Mittwoch, den 08. Juli 2009 zur Vorlesung

Pro Informatik: Logik & Diskrete Mathematik

(Klaus Kriegel, Frank Hoffmann)

Abgabe: Keine Abgabe, Besprechung im Tutorium

1. **Bedingte Wahrscheinlichkeit**
   Wir betrachten ein Experiment von 5 Münzwürfen (unabhängig, gleichverteilt) und bezeichnen mit (Ω, p) den entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraum. Wir interessieren uns für die folgenden Ereignisse:
   A : die Ergebnisse der ersten drei Münzwürfe sind gleich.
   B : die Ergebnisse der letzten drei Münzwürfe sind gleich.
   C : die Ergebnisse des ersten, dritten und letzten Münzwurfs sind gleich.
   D : der erste und der letzte Wurf sind 1 (Zahl).

   (a) Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $Pr(A|B)$, $Pr(B|C)$, $Pr(D|A)$ und $Pr(D|C)$.

   (b) Welche Paare der vier Ereignisse sind unabhängig?

2. **Geometrische Verteilungen**
   In den folgenden Spielen wird ein Experiment so lange wiederholt, bis eine bestimmte Abbruchbedingung erfüllt ist. Zur Vereinfachung schreiben wir die Ergebnisfolgen als Strings (ohne Kommata). Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Spiel über genau n Runden geht (n eine fest gewählte natürliche Zahl). Die Antworten sollten ausreichend begründet werden.

   (a) Münzwurf bis zum zweiten Mal Kopf (1) fällt (z.B. 0001001).

   (b) Würfeln bis zum zweiten Mal eine 6 fällt (z.B. 3461326).

   (c) Würfeln bis Summe durch 3 teilbar ist (z.B. 253452).

   (d) Doppelwurf mit zwei unabhängigen Würfeln bis beide die gleiche Zahl haben (z.B. für $(2,3)(3,1)(6,4)(3,3)$ ist $n = 4$).

3. **Erwartungswerte**
   Es sei $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ der Wahrscheinlichkeitsraum eines Würfels mit Gleichverteilung Pr und $(\Omega_2, Pr_2) = (\Omega, Pr) \times (\Omega, Pr)$ der Wahrscheinlichkeitsraum von zwei unabhängigen (unterscheidbaren) Würfeln.

   (a) Bestimmen Sie die Erwartungswerte der Zufallsvariablen $X(a_1, a_2) = |a_1 - a_2|$, $Y(a_1, a_2) = a_1 + a_2$ und $Z(a_1, a_2) = a_1^2 + a_2^2$.

   (b) Man kann die Aufgabe leicht auf drei und mehr Würfel verallgemeinern, wobei es für die Variable X (Differnz der Würfel) jeweils zwei Varianten gibt: die minimale und die maximale Differenz. Für 3 Würfel haben wir:
   $X_{min}(a_1, a_2, a_3) = min\{|a_1 - a_2|, |a_1 - a_3|, |a_2 - a_3|\}$ und
   $X_{max}(a_1, a_2, a_3) = max\{|a_1 - a_2|, |a_1 - a_3|, |a_2 - a_3|\}$.

Die Bestimmung der Erwartungswerte $E(X_{min})$ und $E(X_{max})$ erfordert leider eine (etwas aufwändige) Aufteilung der $6^3 = 216$ Fälle. Machen Sie den Versuch! Zumindest für X_{min} kann man sich die Arbeit durch die Überlegung erleichtern, dass als Werte nur $0, 1$ und 2 in Frage kommen, wobei 0 und 2 leicht abzuzählen sind. Sie können ihre Ergebnisse natürlich auch durch ein Programm überprüfen lassen.

(c) Vergleichen Sie die Erwartungswerte aus (b) mit $E(X)$ aus (a) und stellen Sie eine Hypothese auf, wie sich diese Werte für große n (Wüfelanzahl) entwickeln. Geben Sie eine verbale Begründung (Plausibilitätserklärung) an. Können Sie die Hypothese für $E(X_{min})$ auch beweisen?