

8. Aufgabenblatt vom Freitag, den 03. Juli 2009 zur Vorlesung

Pro Informatik: Logik & Diskrete Mathematik
(Klaus Kriegel, Frank Hoffmann)

Abgabe: Montag, d. 06.07.09, Anfang der Vorlesung

1. **Relationen und Funktionen** (6 Punkte)

In der folgenden Tabelle sind 12 Relationen $R \subseteq A \times A$ dargestellt, die sich durch Kombination von 4 definierenden Aussageformen und 3 Zahlbereichen für A ergeben (\mathbb{N} die natürlichen Zahlen, \mathbb{Q} die rationalen Zahlen und \mathbb{R}^+ die positiven reellen Zahlen ohne Null). Untersuchen Sie welche dieser Relationen Funktionen sind und wenn ja, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Dazu können folgende Symbole benutzt werden:

- b falls die Relation eine bijektive Funktion von A auf A ist
- i falls die Relation eine injektive Funktion von A in A , aber nicht bijektiv ist
- s falls die Relation eine surjektive Funktion von A auf A , aber nicht bijektiv ist
- f falls die Relation eine Funktion von A in A , aber weder injektiv noch surjektiv ist
- \times falls die Relation keine Funktion von A in A ist

definierende Aussageform	$A = \mathbb{N}$	$A = \mathbb{Q}$	$A = \mathbb{R}^+$
$\{(x, y) \in A \times A \mid y = 3(x + 1)\}$			
$\{(x, y) \in A \times A \mid x = 3(y + 1)\}$			
$\{(x, y) \in A \times A \mid x^2 - y - 2 = 0\}$			
$\{(x, y) \in A \times A \mid x - y^2 + 2 = 0\}$			

2. **Schubfachprinzip** (2 Punkte)

Eine Bank hat 75000 Kunden und verwendet für deren Kreditkarten einen Code, der aus 4 Stellen besteht. Zunächst 2 kleine Buchstaben und dann 2 Ziffern. Zeigen Sie, dass es mindestens zwei Kunden mit demselben Code geben muss.

(Hinweis: Es gibt 26 Buchstaben.)

3. **Vollständige Induktion** (6 Punkte)

- (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass genau in der Hälfte aller Bitstrings der Länge n eine gerade Anzahl von Einsen vorhanden ist.

- (b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Zahl $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ durch 21 teilbar.

4. **Kombinatorik** (6 Punkte)

Für die folgenden Fragen sollten Sie die richtige Anzahl bestimmen (dabei kann man auch einen Taschenrechner benutzen) und eine kurze Begründung des Lösungswegs geben.

- (a) Wieviele 12-stellige Dezimalzahlen gibt es in denen die Ziffer 1, 2, 3 und 4 jeweils dreimal auftreten?
- (b) Wieviele 12-stellige Dezimalzahlen gibt es in denen die Ziffer 1, 2, 3 jeweils genau dreimal und die Ziffer 4 genau einmal auftreten?
- (c) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus 5 Blumensorten einen Strauß mit 10 Blumen zusammenzustellen (zwei Sträuße sind gleich, wenn sie von jeder Sorte die gleiche Anzahl Blumen enthalten).