6. Aufgabenblatt vom Montag, den 29. Juni 2009 zur Vorlesung

Pro Informatik: Logik & Diskrete Mathematik

(Klaus Kriegel, Frank Hoffmann)

Abgabe: keine, wird im Tutorium besprochen

1. **Halbordnungen**
   Auf der Menge $\mathbb{B}$ ist mit $0 \leq 1$ in natürlicher Weise eine Halbordnung definiert. Man kann diese Halbordnung $(\mathbb{B}, \leq)$ wie folgt auf $\mathbb{B}^n$ übertragen:

   $$(b_1, b_2, \ldots, b_n) \preceq (b'_1, b'_2, \ldots, b'_n) \iff \forall\ 1 \leq i \leq n \quad b_i \leq b'_i$$

   Definition: Sind $(A, \leq)$ und $(B, \preceq)$ zwei Halbordnungen und $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion, dann nennt man f monoton (auch monoton wachsend), wenn für beliebige $a, a' \in A$ aus $a \leq a'$ die Eigenschaft $f(a) \preceq f(a')$ folgt. Die $(A, \leq)$ und $(B, \preceq)$ werden isomorph genannt, wenn eine bijektive Funktion $f : A \longrightarrow B$ existiert, so dass sowohl f als auch die Umkehrfunktion f^{-1} monoton sind.

   (a) Zeigen Sie, dass für jede n-elementige Menge M die Halbordnungen $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ und $(\mathbb{B}^n, \preceq)$ isomorph sind.

   (b) Eine monotone Boolesche Funktion ist eine monotone Funktion von der Halbordnung $(\mathbb{B}^n, \preceq)$ in die Halbordnung $(\mathbb{B}, \leq)$. Zeigen Sie mit Terminduktion, dass alle Booleschen Formeln über der Signatur $\{\vee, \wedge\}$ monotone Boolesche Funktionen beschreiben.

2. **Funktionen I**
   $\mathbb{R}^+$ bezeichne die Menge der positiven reellen Zahlen einschließlich der 0. Drei Funktionen $f, g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ und $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ sind definiert durch $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = |y - 2x + 1|$ und $h(x) = (x, x^2)$.
   Untersuchen Sie die Funktionen $f \circ h, g \circ h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ und $h \circ f, h \circ g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

3. **Funktionen II**
   Beweisen Sie, dass Eine Funktion $f : A \longrightarrow B$ genau dann injektiv ist, wenn für jede Menge C und zwei beliebige Funktionen $g, h : C \longrightarrow A$ aus der Identität $f \circ g = f \circ h$ die Identität $g = h$ folgt.