3. Aufgabenblatt vom Mittwoch, den 24.Juni 2009 zur Vorlesung

Pro Informatik: Logik & Diskrete Mathematik

(Klaus Kriegel, Frank Hoffmann)

Abgabe: keine, wird im Tutorium besprochen

1. **Prädikatenlogik I**
   Geben Sie eine formale Beschreibung der folgenden drei Prädikate an, wobei wir als Individuenbereich die Menge der natürlichen Zahlen vereinbaren. Sie können dabei die Quantoren $\forall$ und $\exists$, die Symbole für die Grundrechenarten und alle logischen Verknüpfungen sowie die Relationssymbole $=, \leq, \geq, <, >$ verwenden, aber **nicht** das Teilbarkeitssymbol $|$.

   (a) $P(n)$: n ist eine Primzahl

   (b) $Q(n)$: n ist Potenz einer Primzahl

   (c) $R(n)$: n hat (mindestens) zwei verschiedene Primteiler

   (d) Versuchen Sie, das Prädikat $R(n)$ zu beschreiben, ohne explizit oder implizit die Primzahldefinition zu verwenden (hier können Sie mit $|$ arbeiten). Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Beschreibung.

2. **Prädikatenlogik II**
   Der Gültigkeitsbereich für die Variablen x, y, z in dieser Aufgabe sei auf die positiven reellen Zahlen (ohne Null) $\mathbb{R}^+$ festgelegt. Dazu sind die folgenden Prädikate gegeben:

   $$\begin{array}{ll} P(x) = 1 & \text{genau dann, wenn } x \geq 1 \\ Q(x,y) = 1 & \text{genau dann, wenn } x < y \\ R(x,y,z) = 1 & \text{genau dann, wenn } x + y = z \end{array}$$

   Welche Wahrheitswerte haben die folgenden Aussagen?

   a) $R(1,2,3)$
   b) $\exists x\ R(x,x,3)$
   c) $\exists y\ \forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(y,x))$
   d) $\forall z\ \exists x\ \exists y\ (P(z) \Rightarrow P(x) \wedge R(x,y,z))$
   e) $\forall x\ \forall z\ \exists y\ R(x,y,z)$
   f) $\forall x\ \forall z\ \exists y\ (Q(x,z) \Rightarrow R(x,y,z))$

3. **Prädikatenlogik III**
   Die Definition, dass eine Funktion f auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, kann man wie folgt mit Quantoren beschreiben:

   $$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \forall x \in I\ \forall x' \in I\ \big(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon\big)$$

   (a) Negieren Sie diese Aussage und bringen Sie die Negation in eine möglichst einfache, gut verständliche Form.

   (b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^2$ über dem Intervall $[-2,2]$ gleichmäßig stetig ist (Tip: 3. Binomische Formel nutzen)!

   (c) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = \frac{1}{x}$ über dem offenen Intervall $(0,1)$ nicht gleichmäßig stetig ist.