

# Die Geometrie der Tischlerei

## 1 Worum geht es ?

Problem: Wir wollen ein einfaches Polygon  $P$  aus einer oder mehreren Holzplatten aussägen und dürfen dazu nur eine Kreissäge benutzen.

Durch die Einschränkung der Kreissäge, können wir nur gerade Schnitte machen. Dies hat zur Folge, dass wir Probleme an Ecken, deren Innenwinkel größer als  $180^\circ$  ist, erhalten können.



das Polygon  $P$  (rechts) soll aus der Holzplatte  $Q$  (links) ausgesägt werden

### ein paar Definitionen:

- stumpfe Ecke:  
eine Ecke des Polygons deren Innenwinkel größer als  $180^\circ$  ist
- stumpfe Seite:  
eine Seite bei der **beide** Endecken stumpfe Ecken sind
- $P$  lässt sich aus  $Q$  ausschneiden:
  - $Q$  enthält  $P$
  - es existiert eine endliche Folge von Schnitten  $c_1, \dots, c_k$ , so dass wir eine Folge von Polygonen  $Q = Q_0, Q_1, \dots, Q_k = P$  erhalten, bei denen  $Q_i$  aus  $Q_{i-1}$  durch den Schnitt  $c_i$  erzeugt wird.

### Theorem 1 (Demaine, Demaine und Kaplan [1]):

$P$  lässt sich aus  $Q$  ausschneiden, genau dann wenn  $P$  nicht zwei benachbarte stumpfe Ecken besitzt.

Wir wollen dieses vorhandene Modell erweitern und fügen folgende Bedingungen hinzu:  
Das fertige Produkt soll robust und schön sein.

Diese Bedingungen bedeuten für unser Modell folgendes:

Da das Produkt schön sein soll, können wir kein Sperrholz mehr benutzen, was zur Folge hat, dass wir keine großen Holzplatten mehr haben, sondern sich unser Produkt aus mehreren kleinen Platten zusammensetzt.

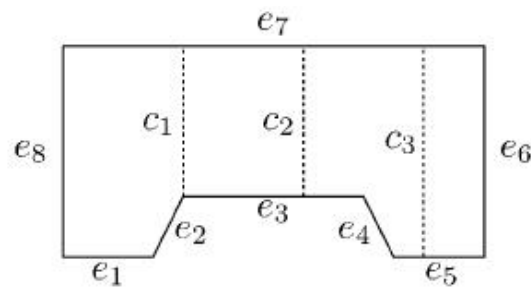
Falls zwei Platten innerhalb einer Seite des Polygons zusammentreffen, müssen die Platten vor dem Schnitt der Seite zusammengefügt werden, da sie sonst nicht genau zusammenpassen werden.

Die Robustheit des Endprodukts gibt vor, dass zwei einmal zusammengefügte Platten nicht mehr getrennt werden dürfen.

## 2 Vorstellung des Modells

### Defintion (Bauplan):

Ein Bauplan  $B = (P, C)$  besteht aus einem Polygon  $P$  mit  $n$  Ecken und einer endlichen Menge vertikaler Strecken  $C$ , genannt Sehnen. Jede Sehne hat beide Endpunkte auf dem Rand von  $P$ .  $C$  unterteilt  $P$  in verschieden Facetten.



[2]

Das Zusammenfügen zweier Platten entspricht dem Entfernen einer Sehne. Ein Schnitt einer Seite entspricht einfach einer Seite im Polygon.

Folgende Regeln müssen gelten, damit das Polygon aussägar ist und alle Bedingungen erfüllt sind:

### Regel 1:

Eine Seite darf nur dann geschnitten werden, wenn sie an genau eine Facette angrenzt

### Regel 2:

Mindestens ein Endpunkt einer Seite darf keine stumpfe Ecke bezüglich der Facette, an die die Seite grenzt, sein.

### Defintion (Konstruktion):

Eine Konstruktion von  $B$  ist eine Folge  $v_1, \dots, v_{n+m}$  von Seiten und Sehnen, in der jede Seite und jede Sehne des Bauplans genau einmal auftritt und bei der beide Regeln beachtet werden.

### Defintion (Gültigkeit eines Bauplans):

Ein Bauplan  $B$  ist gültig  $\Leftrightarrow B$  hat eine Konstruktion

## 3 Gültigkeit von Bauplänen

Vorverarbeitung von Bauplan  $B = (P, C)$ :

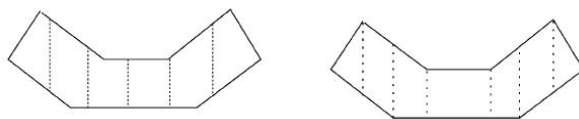
- alle Sehnen, die beide Eckpunkt im inneren einer Seite von  $P$  haben werden aus  $C$  entfernt.

- Die sogenannten Steiner Sehnen werden hinzugefügt. Dies sind Sehnen, die von einer Ecke des Polygons  $P$  vertikal durchs innere des Polygons verlaufen.

Den so aus  $B$  erhaltene Bauplan nenne wir  $B' = (P, C')$

**Defintion (falsche und echte Sehnen):**

Die Sehnen die in  $B$  vorkommen nennen wir echte Sehnen. Die Sehnen, die nur in  $B'$  vorhanden sind, nennen wir falsche Sehnen.



[2]

links der Bauplan  $B = (P, C)$  vor der Vorverarbeitung, rechts nach ihr ( $B' = (P, C')$ )

**Defintion (Richtung eines Schnitts):**

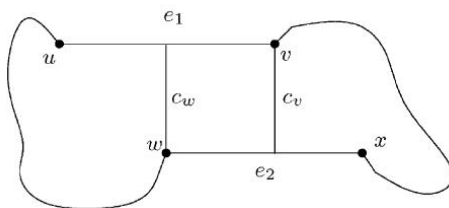
Sei  $e = (u, v)$  eine Seite in  $P$ . Wir sagen, dass  $e$  von  $u$  nach  $v$  geschnitten wird ( $d(e) = uv$ ), wenn die Sehne, die an  $v$  angrenzt entfernt wird, bevor der Schnitt gemacht wird.

**Lemma 1:**

Es gibt keine Konstruktion von  $B'$ , falls eine stumpfe Seite  $e = (u, v)$  existiert mit  $d(e) = uv$  und  $d(e) = vu$

**Defintion (Überlappung):**

Eine Überlappung entsteht, wenn wir zwei Seiten  $e_1 = (u, v)$  und  $e_2 = (w, x)$  haben, bei denen jeweils eine Sehne  $c_v$  bzw.  $c_w$  ( $c_v$  hat einen Endpunkt in  $v$  und  $c_w$  hat einen Endpunkt in  $w$ ) im Inneren der anderen Seite enden.



[2]

**Lemma 2:**

Falls  $e_1 = (u, v)$ ,  $e_2 = (w, x)$ ,  $c_v$  und  $c_w$  eine Überlappung bilden, muss in jeder Konstruktion von  $B'$   $d(e_1) = uv$  und  $d(e_2) = xw$  sein.



## 5 Erstellen von Bauplänen

1. keine Bedingungen an Bauteile:

$C = \text{Steiner Sehnen von } P \Rightarrow B = (P, C)$

2. Bauteile haben feste Breite:

skaliere  $P$  relativ zur Breite der Bauteile  $\Rightarrow$  alle Sehnen in  $B$  müssen ganzzahlige  $x$  Koordinaten haben

- $P$  hat keine stumpfen Seiten:  
jeder Bauplan für  $P$  ist gültig
- $P$  hat mindestens eine stumpfe Seite:
  - weise einem Endpunkt einer stumpfen Seite  $e$  eine echte Sehne zu
  - alle anderen Sehnen werden nach der Bedingung (ganzzahlige  $x$  Koordinaten) verteilt
  - falls gültiger Bauplan: fertig
  - weise dem anderen Endpunkt von  $e$  eine echte Sehne zu und teste erneut

## Literatur

[1] E.D. Demaine, M.L. Demaine, C.S. Kaplan, Polygons cuttable by a circular saw, *Comput. Geom.: Theory Appl.* 20(1-2) (2002) 69-84; Special Issue of Selected Papers from the 12th Annual Canadian Conference of Computational Geometry

[2] Pat Morin, Jason Morrison. The geometry of carpentry and joinery. *Discrete Applied Mathematics*, 144(3), 2004, pp. 374-380