7. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik, SoSe 2008

(Dr. Frank Hoffmann)

Abgabe: Montag, 09. Juni 2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 Satz von Rice (4 Punkte)

Schauen Sie sich nochmal den Satz von Rice an und begründen Sie, in welchen der folgenden Beispiele er sich anwenden lässt. Argumentieren Sie außerdem, dass die anderen aufgeführten Sprachen entscheidbar sind.

(a) $L_1 = \{\langle M \rangle \mid$ Startend auf dem leeren Band erreicht M eine Konfiguration mit einem gegebenen Zustand q in höchstens 5 Schritten$\}$

(b) $L_2 = \{\langle M \rangle \mid$ M hält nur bei endlich vielen Eingaben$\}$

(c) $L_3 = \{\langle M \rangle \mid$ M berechnet 0 bei Eingabe 1$\}$

(d) $L_4 = \{\langle M \rangle \mid$ M hat weniger als 100 Zustände und hält bei Eingabe 0$\}$

Aufgabe 2 Abschlusseigenschaften von $\mathbb{P}$ und $\mathbb{NP}$(6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Klasse $\mathbb{P}$ abgeschlossen ist gegen Vereinigung, Durchschnitt und Konkatenation.
Zusatzfrage (4 Zusatzpunkte): Zeigen Sie die Abgeschlossenheit gegen Kleene–Stern!

Zeigen Sie, dass die Klasse $\mathbb{NP}$ abgeschlossen ist gegen Vereinigung, Durchschnitt und Kleene–Stern.

Aufgabe 3 brute–force–Primzahltest nicht in $\mathbb{P}$ (2 Punkte)

Warum hat der Brute–Force–Primzahltest, der für Zahlen p in Binärdarstellung alle möglichen Teiler $q \leq \sqrt{p}$ testet, keine polynomielle Laufzeit?

Aufgabe 4 Sprache in $\mathbb{P}$ (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Sprache $\{< a, b, c, p >\mid a, b, c, p \in \mathbb{N}$ und $a^b \equiv c \bmod p\}$ für binär kodierte Eingabe in der Komplexitätsklasse $\mathbb{P}$ liegt.

Aufgabe 5 Ein Graphenproblem (6 Punkte)

Beweisen Sie, dass das Entscheidungsproblem, ob ein ungerichteter Graph 2–färbbar ist, in der Komplexitätsklasse $\mathbb{P}$ liegt.
Beweisen Sie weiterhin, dass das Entscheidungsproblem, ob ein ungerichteter Graph 3–färbbar ist, in der Komplexitätsklasse $\mathbb{NP}$ liegt.
Hinweis: Ein Graph ist k–färbbar, wenn es eine Zuordnung von den Knoten zu k Farben gibt, so dass beliebige zwei benachbarte Knoten verschiedene Farben haben. 2–Färbbarkeit ist äquivalent zu der Eigenschaft, dass alle Kreise im Graphen gerade Länge haben.