9. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik, SoSe 2008

(Dr. Frank Hoffmann)

Lösungen: F. Hoffmann

Aufgabe 1 Chomsky–Normalform (4 Punkte)

Wandeln Sie die folgenden Grammatiken in Chomsky–Normalform um. Dabei ist die Startvariable jeweils S.

(a) $\Sigma = \{a, +, *, (,)\}, V = \{A, B, S\}$
Produktionen: $S \to S + A \mid A,\ A \to A * B \mid B,\ B \to (S) \mid a$

(b) $\Sigma = \{a\}, V = \{A, B, S\}$
Produktionen: $S \to AaA \mid AB,\ A \to B \mid aBB,\ B \to a \mid Aa$

Lösung:
zu (a):
Durch neue Variable $H_+, H_*, H_(, H_)$ und Regeln $H_+ \to +, H_* \to *, H_(\to (, H_) \to)$ kann man auf den rechten Seiten das gemeinsame Auftreten von Variablen und Terminalsymbolen verhindern. Mittels weiterer Hilfsvariablen H_1, H_2, H_3 können wir auf den rechten Seiten jeweils weniger als 3 Variable erreichen:
Aus $S \to SH_+A$ wird $S \to SH_1$ und $H_1 \to H_+A$. Analog aus $A \to AH_*B$ werden $A \to AH_2$ und $H_2 \to H_*B$, schließlich ersetzen wir $B \to H_(SH_)$ durch $B \to H_(H_3$ und $H_3 \to SH_)$.
Nun werden noch die Kettenregeln $S \to A$ und $A \to B$ eliminiert. Wegen der Regel $B \to a$ werden daraus $A \to a$ und $S \to a$.
In Chomsky–Normalform sieht die Grammatik jetzt so aus:

$$S \to SH_1 \tag{1}$$
$$H_1 \to H_+A \tag{2}$$
$$A \to AH_2 \tag{3}$$
$$H_2 \to H_*B \tag{4}$$
$$B \to H_(H_3 \tag{5}$$
$$H_3 \to SH_) \tag{6}$$
$$H_+ \to + \tag{7}$$
$$H_* \to * \tag{8}$$
$$H_(\to (\tag{9}$$
$$H_) \to) \tag{10}$$
$$A \to a \tag{11}$$
$$B \to a \tag{12}$$
$$S \to a \tag{13}$$

zu (b)
Mit den neuen Variablen H_a, H_1, H_2 ergibt sich analog zu Aufgabe (a) die folgende Grammatik in Chomsky–Normalform:

$$\begin{aligned} S &\to AH_1 && (1)\\ H_1 &\to H_aA && (2)\\ S &\to AB && (3)\\ A &\to H_aH_2 && (4)\\ H_2 &\to BB && (5)\\ B &\to AH_a && (6)\\ H_a &\to a && (7)\\ B &\to a && (8)\\ A &\to a && (9) \end{aligned}$$

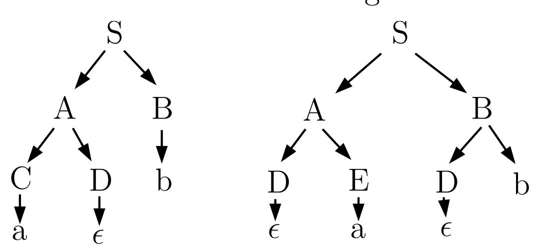
Aufgabe 2 Syntaxbaum (4 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik G mit $\Sigma = \{a, b\}, V = \{A, B, C, D, E\}$ und folgenden Regeln:

$$S \to AB,\ A \to C \mid DE,\ B \to Db \mid bD,\ C \to a,\ D \to \epsilon,\ E \to CD \mid a$$

Zeichnen Sie einen Syntaxbaum für das Wort $w = ab$ aus $L(G)$. Ist dieser eindeutig? Wie sieht die Sprache $L(G)$ aus? Würde aus der Eindeutigkeit des Syntaxbaumes von w die Eindeutigkeit der Grammatik folgen?

Lösung:
Hier sind zwei verschiedene Syntaxbäume für das Wort $w = ab$. Damit ist die Grammatik nicht eindeutig.



Schaut man sich die Grammatik genauer an, so sieht man, dass die Variable D überflüssig ist und aus den Variablen A, E und C jeweils nur das Terminalsymbol a abgeleitet werden kann. Also ist $w = ab$ das einzige Wort in $L(G)$.

Aufgabe 3 CYK–Algorithmus (4 Punkte)

Wenden Sie den CYK–Algorithmus an auf die Wörter $w_1 = aaaaa, w_2 = aaaaaa, w_3 = baaba$ und die folgende Grammatik.

$$S \to AB \mid BC,\ A \to BA \mid a,\ B \to CC \mid b,\ C \to AB \mid a$$

Aufgabe 4 Pumping–Lemma Typ–2 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht kontextfrei sind mittels des Pumping–Lemmas.

(a) $L_1 = \{a^j b^k c^l \mid j \geq k \geq l \geq 1\}$

(b) $L_2 = \{0^p \mid p \text{ Primzahl}\}$

Aufgabe 5 Speicherbedarf SAT (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass sich das Problem der Erfüllbarkeit einer Formel (SAT) mit linearem Speicheraufwand in der Grösse der Eingabeformel lösen lässt.

Lösung: In der Größe der Codierung der Eingabe lässt sich sicher eine konkrete Belegung der in der Formel auftretenden Variablen aufs Band schreiben. Für eine konkrete Belegung lässt sich dann ohne zusätzlichen Speicheraufwand fesstellen, ob sie erfüllend ist. Alles was zu tun bleibt ist sequentiell alle möglichen Belegungen der Variablen (auf ein und demselben Bandbereich!) zu erzeugen. Dies kann zum Beispiel in lexikographisch austeigender Reihenfolge geschehen.