6. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik, SoSe 2008

(Dr. Frank Hoffmann)

Lösungen: Daniel Werner

Aufgabe 1 Unentscheidbar I (4 Punkte)

Geben Sie eine unendliche Familie von unentscheidbaren Sprachen an. Begründen Sie kurz deren Unentscheidbarkeit.

Lösung: Eine Familie von unentscheidbaren Sprachen ist $\{A_x \mid x \in \Sigma^*\}$, wobei A_x definiert ist als $\{w \mid M_w \text{ akzeptiert genau} x\}$. Dass jede dieser Sprachen unentscheidbar ist, sieht man leicht mit dem Satz von Rice.

Aufgabe 2 Unentscheidbar II (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Äquivalenzproblem für Turing–Maschinen nicht entscheidbar ist. Zwei Turing–Maschinen heißen äquivalent, wenn sie dieselbe Sprache erkennen.

Aufgabe 3 Reduktionen (6 Punkte)

(a) Seien X und R Sprachen. R sei regulär und es gelte $X \leq R$. Ist X dann ebenfalls eine reguläre Sprache? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Sei z.B. $X = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $R = \{1\} \subset \Sigma^*$. Wie wir bereits wissen, ist X entscheidbar. Sei dann $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ wie folgt definiert:

$$f(w) = \begin{cases} 1 & \text{falls } w \text{ von der Form } 0^n 1^n \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $w \in X \Leftrightarrow f(w) = 1 \Leftrightarrow f(w) \in R$, und f ist berechenbar. X ist aber nicht regulär, R hingegen schon (da endlich). Also ist die Aussage falsch.

(b) Zeigen Sie, dass die Reduktion $\leq$ eine transitive Relation ist.

Lösung: Es gelte $L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq L_3$. Wir haben $L_1 \leq L_3$ zu zeigen. Seien dazu f, g berechenbar mit $w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$ und $w' \in L_2 \Leftrightarrow g(w') \in L_3$. Wir berechnen nun $h = g \circ f$ wie folgt:

```
Auf Eingabe w
    berechne f(w)
        berechne g auf Eingabe f(w)
```

Diese TM hält nach endlicher Zeit an, da die TMs für f und g nach endlicher Zeit anhalten. Also ist h berechenbar. Weiterhin ist $w \in L_1 \Leftrightarrow w' = f(w) \in L_2 \Leftrightarrow g(w') = g(f(w)) = h(w) \in L_3$, und somit $L_1 \leq L_3$.

(c) Die Sprache A sei semi-entscheidbar und es gilt $A \leq A^C$. Zeigen Sie, dass A dann auch entscheidbar sein muss.

Lösung: Sei f berechenbar sodass $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in A^C$ gilt. Wir können nun A wie folgt entscheiden: Auf Eingabe w berechnen wir zunächst $f(w)$. Dann wenden wir den Semientscheidungsalgorithmus für A auf w und parallel den für A^C auf $f(w)$ an. Akzeptiert nun die TM für A, so akzeptieren wir das Wort, akzeptiert hingegen die für A^C, so gilt $f(w) \in A^C$, also $f(w) \notin A$, und wir verwerfen. Da jedes w in $\Sigma^* = A \cup A^C$ liegt, muss einer der beiden Fälle eintreten. Also ist A entscheidbar (und damit natürlich auch A^C).

Aufgabe 4 Unentscheidbar III (2 Punkte)

Gibt es unentscheidbare Sprachen über dem einelementigen Alphabet $\Sigma = \{1\}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 Postsches Korrespondenzproblem (4 Punkte)

(a) Finden Sie Indizes $i_1 \ldots i_n$, so dass für die folgende Instanz des PKP gilt $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_n}$ mit $(x_{i_j}, y_{i_j}) \in K$.

$$K = \{(01, 0101), (1, 0), (010, 1), (00, 0)\}$$

(b) Ist das PKP über dem einelementigen Alphabet $\Sigma = \{1\}$ entscheidbar? Warum bzw. warum nicht?