3. Aufgabenblatt zur Vorlesung

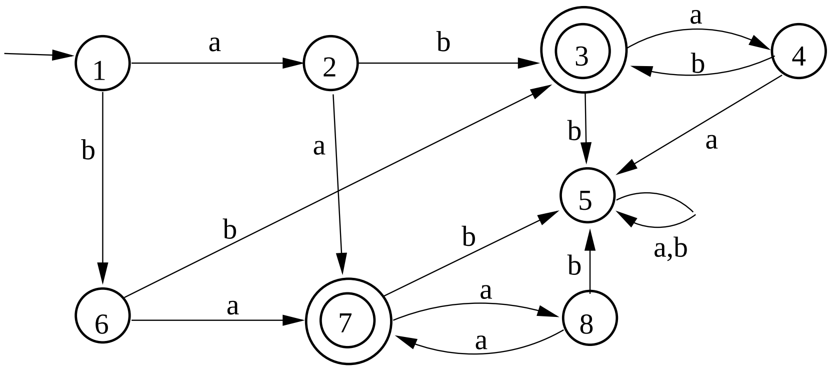
Grundlagen der Theoretischen Informatik, SoSe 2008

(Dr. Frank Hoffmann)

Lösungen: von Daniel Werner

Aufgabe 1 Minimalautomat (4 Punkte)

Konstruieren Sie zu folgendem dfa einen äquivalenten mit minimaler Zustandszahl.



Lösung: Wir wenden das uns bekannte Verfahren an, um äquivalente Zustände zu bestimmen. Angegeben ist auch jeweils ein kürzester Zeuge für die Nichtäquivalenz. Zunächst markieren wir also Paare von akzeptierenden und nichtakzeptierenden Zuständen (Zeuge ε):

2							
3	ε	ε					
4			ε				
5			ε				
6			ε				
7	ε	ε		ε	ε	ε	
8			ε				ε
	1	2	3	4	5	6	7

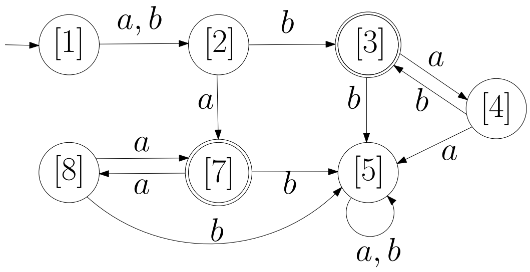
Nun überprüfen wir für jedes noch nicht markierte Zustandspaar (p, q) und jedes $x \in \Sigma$, ob $(\delta(p, x), \delta(q, x))$ bereits markiert ist. Beginnen wir z. B. mit $(8, 2)$ und b, so erhalten wir das Paar $(5, 3)$, welches bereits als nichtäquivalent entlarvt wurde. Also markieren wir auch das Feld $(2, 8)$:

2							
3	ε	ε					
4			ε				
5			ε				
6			ε				
7	ε	ε		ε	ε	ε	
8		b	ε				ε
	1	2	3	4	5	6	7

So fortfahrend bekommen wir folgende Tabelle:

2	a						
3	ε	ε					
4	b	a	ε				
5	ba	a	ε	b			
6	a		ε	a	a		
7	ε	ε	ab	ε	ε	ε	
8	a	b	ε	b	a	b	ε
	1	2	3	4	5	6	7

Wie man sieht, ist das Paar $(2,6)$ (auch nach hinreichend vielen Iterationen) nun noch nicht markiert, die beiden Zustände sind also äquivalent. Der entsprechende Minimalautomat sieht dann wie folgt aus:



Aufgabe 2 Homomorphismen (6 Punkte)

Seien Δ, Σ endliche Alphabete und h eine Funktion von Σ nach Δ^*. Wir erweitern h mittels

$$h(\epsilon) = \epsilon, \qquad h(wy) = h(w)h(y), w \in \Sigma^*, y \in \Sigma$$

zu einer Funktion von Σ^* nach Δ^*. Eine solche Funktion heißt Homomorphismus. Beweisen Sie:

(a) Sei $\Sigma = \{0, 1\}, \Delta = \{a, b\}$. Sei $h(0) = aa$ und $h(1) = aba$. Bestimmen Sie das Urbild $h^{-1}(L)$ für die durch den regulären Ausdruck $(ab \cup ba)^*a$ gegebene Sprache L über Δ.

Lösung: Zu bestimmen ist das Urbild der Sprache $L = (ab \cup ba)^*a \subseteq \Delta^*$ unter h, also die Menge $w \in \Sigma^*$ mit $h(w) \in L$. Dazu stellen wir zunächst fest, dass kein Wort aus $h(\Sigma^*)$ mit b beginnt. Also können wir uns auf Wörter aus L, die mit

ab beginnen, beschränken. Da der nun folgende Buchstabe ein a sein muss, ist jedes Wort aus $(h \circ h^{-1})(L) = h(\Sigma^*) \cap L(!)$ entweder gleich aba oder beginnt mit $abab$. Für den ersten Fall ist das Urbild gerade $\{1\}$, im zweiten Fall lässt es sich nicht zu einem Wort aus $h(L)$ fortsetzen, da kein Wort aus $h(\Sigma^*)$ mit b beginnt. Also ist $h^{-1}(L) = \{1\}$.

(b) Ist $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache, so ist auch $h(L) = \{h(w) | w \in L\}$ regulär.

Lösung: Da $L \subseteq \Sigma^*$ regulär ist, existiert ein dfa $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L(M) = L$. Diesen möchten wir nun benutzen, um einen (nichtdeterministischen) Automaten M_h zu konstruieren, der $h(L)$ erkennt. Die Idee dabei ist, dass der neue Automat bei Eingabe eines Wortes $h(x) \in \Delta^*$ dasselbe tut wie der Automat M beim Lesen des Urbildzeichens $x \in \Sigma$. Sei dazu

$$Q_h = Q \cup \bigcup_{(q,x) \in Q \times \Sigma} \{q_x^i \mid 1 \leq i < |h(x)|\}$$

und $\delta_h : Q_h \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q_h)$ wie folgt (mit den Bezeichnungen $q_x^0 = q$ und $q_x^{|h(x)|} = \delta(q, x)$):

$$\delta_h(q_x^i, y) = \begin{cases} \{q_x^{i+1}\}, & h(x)_{i+1} = y \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Setze nun $M_h = (Q_h, \Sigma, \delta_h, q_0, F)$. Für $y \notin h(\Sigma^*)$ ist dann $\delta_h^*(q_0, y) = \emptyset$ und für $y = h(w) = h(w_1 \dots w_k) \in h(\Sigma^*)$ gilt

$$\delta_h^*(q_0, h(w_1 \dots w_k)) = \delta_h^*(q_0, h(w_1) \dots h(w_k))) = \{\delta^*(q_0, w_1 \dots w_k)\} \subseteq F$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\delta^*(q_0, w_1 \dots w_k) \in F$$
$$\Leftrightarrow$$
$$w \in L$$

und damit ist $L(M_h) = h(L)$, wie gewünscht.

(c) Ist $L \subseteq \Delta^*$ regulär, so ist auch das Urbild $h^{-1}(L) = \{w \in \Sigma^* | h(w) \in L\}$ regulär.

Lösung: Auch hier nutzen wir wieder die Eigenschaft aus, dass sich reguläre Sprachen von dfas erkennen lassen. Sei also $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein Automat, der die Sprache L erkennt. Wir setzen nun $M_{h^{-1}} = (Q, \Sigma, \delta_{h^{-1}}, q_0, F)$ mit $\delta_{h^{-1}}(q, x) = \delta^*(q, h(x))$. Der Automat soll beim Lesen eines Zeichens $x \in \Sigma$ also im gleichen Zustand landen wie der Automat für L beim Lesen des *Wortes* $h(x)$. Dann gilt:

$$M_{h^{-1}} \text{ akzeptiert } w \in \Sigma^*$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\delta_{h^{-1}}^*(q_0, w_1 \dots w_n) \in F$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\delta^*(q_0, h(w_1) \dots h(w_n)) \in F$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\delta^*(q_0, h(w)) \in F$$
$$\Leftrightarrow$$
$$M \text{ akzeptiert } h(w) \in \Delta^*$$

und damit ist $L(M_{h^{-1}}) = h^{-1}(L)$, also $h^{-1}(L)$ regulär.

Aufgabe 3 Mealy–Automaten (4 Punkte)

Endliche Automaten M vom Mealy–Typ (auch *finite state transducer* genannt) sind solche, die bei Eingabe eines Strings einen String der gleichen Länge als Ausgabe produzieren (also keine ja/nein–Entscheidung wie bei dfa's). Formal ist ein solches M ein 5–Tupel $(Q, \Sigma, \Sigma', \delta : Q \times \Sigma \to Q \times \Sigma', s)$, wobei Q die endliche Zustandsmenge, Σ das Eingabealphabet, Σ' das Ausgabealphabet, s der Startzustand und δ eine Funktion ist, die einem Zustand und einem Eingabesymbol einen Nachfolgezustand und ein Ausgabesymbol zuordnet. Die Zustandsüberführungsdiagramme enthalten auf den Pfeilen dann statt Eingabesymbol nun Eingabe-/Ausgabesymbol.

Konstruieren Sie einen solchen Automaten über $\Sigma = \Sigma' = \{0, 1\}$, der die Bits auf den geraden Stellen und des weiteren an jeder fünften Stelle einer Eingabesequenz unverändert lässt, an den anderen Stellen aber kippt.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Beweisen Sie, daß die Sprache $L = \{0^p | p \text{ prim}\}$ nicht regulär ist, der Kleene'sche Abschluß L^* davon aber doch.

Aufgabe 5 Nerode–Relation (3 Punkte)

Geben Sie die Äquivalenzklassen der Nerode–Relation für die folgende Sprache über $\Sigma = \{0\}$ an:

$$L = \{0^k | k \geq 1 \text{ und } k = n^2 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$