Universelle Turingmaschinen

bisher: zum Erkennen einer rekursiven Sprache L wurde jeweils eine spezielle dtm M_L angegeben

jetzt: konstruieren feste dtm *("universelle Turing-maschine")*, die als Eingabe eine (Kodierung einer) dtm und ein Wort w bekommt und die M auf w simuliert *("Interpreter")*

Normierte Turingmaschinen

Def.: dtm $M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\underline{b},F)$ heisst normiert, falls
$Q = \{1,\ldots,n\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{0, 1, 2\}$,
$q_0=1$, $\underline{b}=2$, $F=\{2,3\}$, $F_{ja}=\{2\}$, $F_{nein}=\{3\}$

Satz: dtm M kann von einer normierten dtm S mit

$t_S(n) = O(t_M(n))$ und $s_S(n) = O(s_M(n))$

simuliert werden.

Bew.: → *Übung*

Kodierung normierter Turingmaschinen

Def.: falls $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\underline{b},F)$ normierte dtm, und

$\delta(i,j) = (k,l,d_m)$ (wobei $L=d_1$, $R=d_2$ und $S=d_3$),

so ist

$$\langle i,j\rangle := 0^i10^j10^k10^l10^m$$

und

$$\langle M\rangle := 111\langle 1,0\rangle 11\langle 1,1\rangle 11\langle 1,2\rangle 11\langle 2,0\rangle 11\ldots$$
$$\ldots 11\langle i,j\rangle 11\ldots 11\langle n,1\rangle 11\langle n,2\rangle 111\in\{0,1\}^*$$

heisst Gödelnummer von M

"Gödelisierung von Turingmaschinen"

Zur Kodierung von Turingmaschinen

Bem.:

- jede normierte dtm M kann durch ein Wort $\langle M\rangle\in\{0,1\}^*$ kodiert werden
- jedes Wort $w\in\{0,1\}^*$ beschreibt (unter dieser Kodierung) höchstens eine normierte dtm
- *Konvention*: jedes $w\in\{0,1\}^*$ das nicht Kodierung einer normierten dtm ist, kodiert eine dtm die $\{\}$ akzeptiert

Eine universelle Turingmaschine

Satz: es gibt eine dtm U, die bei Eingabe <M>#w die Berechnung der dtm M auf der Eingabe w simuliert

Bew.:

konstruieren 3-dtm

- Eingabe <M>#w auf Band 1 (Arbeitsband von M)
- Programm <M> auf Band 2
- Aktueller Zustand i auf Band 3

Eine universelle Turingmaschine

Bew.:

Vorbereitung:

- Ist die Eingabe syntaktisch korrekt?
  Falls ja, bewege den Kopf auf den 1. Buchstaben von w
- Kopiere das Programm <M> auf Band 2
- Aktueller Zustand i wird als 0^i auf Band 3 geschrieben
  (am Anfang $q_0=1$)

Eine universelle Turingmaschine

Bew.:

Arbeitsweise von U im Zustand i

- Falls $i \in \{2,3\}$ stoppt U

  Falls $i=2$, wird akzeptiert, ansonsten ($i=3$) verworfen
- Lese auf Band 1 den Buchstaben j
- Suche auf Band 2 den Block der Form $0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$
- Falls der Block nicht existiert, stoppt U
- Ersetze Inhalt von Band 3 durch k
- Ersetze auf Band 1 den gelesenen "Buchstaben" durch l
- Bewege den "Kopf" auf Band 1 in Richtung d_m

Diagonalsprache

lexikographische Aufzählung von $\{0,1\}^*$

ε,0,1,00,01,10,11,000,001,...

Def.: Zu $w \in \{0,1\}^*$ bezeichnet T_w die dtm mit Gödelnummer w und $L(T_w)$ die Sprache, die von akzeptiert wird

Def.: $\{w_i \mid i \geq 0\}$ sei lexikographische Aufzählung von $\{0,1\}^*$

$L_D := \{w_i \in \{0,1\}^* \mid T_{w_i} \text{ akzeptiert } w_i \text{ nicht}\}$

heisst Diagonalsprache

Diagonalsprache

Satz: L_D ist nicht entscheidbar

Bew.:

Angenommen, L_D ist entscheidbar, d.h. es gibt dtm M mit Gödelnummer w_j, die auf allen Eingaben hält und $L(M)=L_D$

- Falls $w_j \in L_D$, so gilt
  - M akzeptiert w_j (Definition von $L(M)$)
  - M verwirft w_j (Definition von L_D) ↯
- Falls $w_j \in L^c_D$, so gilt
  - M verwirft w_j (Definition von $L(M)$)
  - M akzeptiert w_j (Definition von L_D) ↯

Komplement der Diagonalsprache

Satz: L^c_D ist nicht entscheidbar

Bew.:

- L_D ist nicht entscheidbar
- entscheidbare Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen

Reduktionskonzept

Def.: Sei $L_1, L_2 \subset \Sigma^*$. Falls es eine totale, berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ gibt, mit

$$\forall w \in \Sigma^* : w \in L_1 \text{ gdw. } f(w) \in L_2,$$

so heisst L_1 auf L_2 reduzierbar mittels f "$L_1 \leq L_2$"

Wortproblem für L_1 wird übersetzt in Wortproblem für L_2

Eigenschaften von Reduktionen

Satz: Sei $L_1, L_2 \subset \Sigma^*$ mit $L_1 \leq L_2$. Dann gilt

- L_2 entscheidbar $\rightarrow$ L_1 entscheidbar
- L_1 nicht entscheidbar $\rightarrow$ L_2 nicht entscheidbar

Bew.:

- $L_1 \leq L_2$ mittels f $\rightarrow$ es gibt dtm T mit $f_T = f$
- L_2 ist entscheidbar $\rightarrow$ es gibt dtm M mit $L(M) = L_2$
- Konstruiere dtm N mit $L(N) = L_1$
  - berechne mittels T den Wert $f(w)$ bei Eingabe w
  - entscheide mittels M, ob $f(w) \in L_2$

Das Halteproblem

Problem: *Entscheide, ob dtm gegeben durch ihr Programm in eine Endlosschleife gerät oder nicht*

Def.: $H = \{p\#w \mid T_p$ hält auf $w \in \{0,1\}^*\}$

"Halteproblem"

Def.: $H_\varepsilon = \{p \mid T_p$ hält auf $\varepsilon\}$

"spezielles Halteproblem"

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz: H ist nicht entscheidbar

Bew.:

- für $w=\langle M\rangle$ mit $M = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,\underline{b},F)$ normierte dtm, sei $w^*=\langle M^*\rangle$ wobei $M^* = (Q,\Sigma,\Gamma,\delta^*,q_0,\underline{b},F\cup\{\infty\})$ dtm mit

  $\delta^*(i,j) := (k,l,d_m)$ falls $\delta(i,j) =(k,l,d_m)$, $k\in F\setminus\{3\}$

  $\delta^*(i,j) := (\infty,l,d_m)$ falls $\delta(i,j) =(3,l,d_m)$

  $\delta^*(\infty,j) := (\infty,j,3)$ für $j\in\Gamma$

  (ersetze nicht akzeptierende Endzustände von <w> durch Endlosschleifen)

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz: H ist nicht entscheidbar

Bew.:

- für totale, berechenbare Funktion $f : w \to w^*\#w$ gilt

  $w \in L^c_D$ gdw. T_w akzeptiert w
  gdw. T_{w^*} hält auf w
  gdw. $f(w) \in H$,

  d.h. $L^c_D \leq H$
- L^c_D ist nicht entscheidbar

  → *Beh.*

Unentscheidbarkeit des spez. Halteproblems

Satz: H_ε ist nicht entscheidbar

Bew.:

- für $p,w \in \{0,1\}^*$ sei $M_{p\#w} \in \{0,1\}^*$ die Beschreibung einer dtm die auf das leere Band zunächst w schreibt und dann wie T_p arbeitet
- die Funktion $f : p\#w \to \langle M_{p\#w} \rangle$ ist total & berechenbar
- $p\#w \in H$ gdw. T_p akzeptiert w gdw. $f(p\#w) \in H_\varepsilon$,

  d.h. $H \leq H_\varepsilon$
- H ist nicht entscheidbar

Die universelle Sprache

Def.: $L_{univ} = \{p\#w \mid w \in L(T_p)\}$

Satz: L_{univ} ist nicht entscheidbar

Bew.: $L^c_D \leq L_{univ}$ *(→ Übung)*

Satz: L_{univ} ist semi-entscheidbar

Bew.:
- betrachte universelle dtm U auf Eingabe $p\#w$
- wird w von T_p akzeptiert, d.h. $w \in L(T_p)$, geschieht dies nach endlich vielen Schritten und U akzeptiert auch
- ansonsten hält/akzeptiert U nicht

Die universelle Sprache

Satz: L^c_{univ} ist nicht semi-entscheidbar

Bew.: (indirekt)
- angenommen L^c_{univ} ist semi-entscheidbar
- L_{univ} ist semi-entscheidbar

  → L_{univ} ist entscheidbar ↯

Folgerung: Semi-entscheidbare Sprachen sind nicht unter Komplementbildung abgeschlossen

Folgerung: Es gibt semi-entscheidbare Sprachen, die nicht entscheidbar sind

Eine “natürliche” unentscheidbare Sprache

Def.: L_{regdtm} = {<M> | M ist dtm und L(M) ist regulär}

Satz: L_{regdtm} ist nicht entscheidbar

Eine “natürliche” unentscheidbare Sprache

Bew.…:

Sei $p,w \in \{0,1\}^*$. Für dtm $M_{p\#w}$, die eine Eingabe x

- akzeptiert, falls $x=0^n1^n$ für ein $n \geq 0$, und sonst
- genau dann akzeptiert, falls die Simulation von T_p auf w akzeptiert

gilt:

- T_p akzeptiert w
  → $L(M_{p\#w})=\Sigma^*$ (regulär)
- T_p akzeptiert w nicht
  (d.h. verwirft oder terminiert nicht)
  → $L(M_{p\#w})=\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ (nicht regulär)

Eine "natürliche" unentscheidbare Sprache

… **Bew.**:

- $f : p\#w \rightarrow \langle M_{p\#w} \rangle$ ist total und berechenbar
- $p\#w \in L_{univ}$ gdw.

  $w \in L(T_p)$ gdw.

  $L(M_{p\#w}) = \Sigma^*$ gdw.

  $L(M_{p\#w})$ regulär gdw.

  $\langle M_{p\#w} \rangle \in L_{regdtm}$ gdw.

  $f(p\#w) \in L_{regdtm}$,

  d.h. $L_{univ} \leq L_{regdtm}$
- L_{univ} ist nicht entscheidbar

Der Satz von Rice

Satz (*ohne Bew.*): Sei P eine Sprache mit:

- $\forall$ dtm $M_1, M_2 : L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow (\langle M_1 \rangle \in P \Leftrightarrow \langle M_2 \rangle \in P)$
- $\exists$ dtm $M_1, M_2 : \langle M_1 \rangle \in P, \langle M_2 \rangle \in P^c$

Dann ist P unentscheidbar.