Minimierung von dea

Sei $L=L(A)$ dea Sprache

Aufgabe: Finde den kleinsten dea A_{min} mit $L=L(A_{min})$

(Grösse eines dea A := Anzahl der Zustände von A)

Idee:

1. Eliminierung von nicht erreichbaren Zuständen
2. berechne A_{min} aus A durch Verschmelzen äquivalenter Zustände

Eliminierung unerreichbarer Zustände

Def.: Sei $A=(Q,\Sigma,\delta,q,F)$ dea. $q \in Q$ heisst unerreichbar, wenn

$$\forall w \in \Sigma^* : \delta^*(q_0,w) \neq q$$

Satz: Die Menge der unerreichbaren Zustände eines dea $A=(Q,\Sigma,\delta,q,F)$ kann in $O(|Q|\ |\Sigma|)$ Zeit bestimmt werden

Bew.:

- betrachte Zustandsdiagramm von A als gerichteten Graphen G_A mit $\leq|Q||\Sigma|$ Kanten
- wenn es in G_A von q_0 keinen gerichteten Weg nach $q \in Q$ gibt, so kann q gestrichen werden
- Breitensuche auf G_A bestimmt von q_0 erreichbare Knoten

Äquivalente Zustände

Def.: Sei $A=(Q,\Sigma,\delta,q,F)$ dea. Zwei Zustände $q,q' \in Q$ heissen äquivalent $q \equiv q'$, wenn

$$\forall w \in \Sigma^* : \delta^*(q,w) \in F \text{ gdw. } \delta^*(q',w) \in F$$

"alle von q,q' ausgehenden Berechnungen liefern dasselbe Ergebnis (bzgl. Akzeptanz)"

Eigenschaften der $\equiv$-Relation

Satz: $\equiv$ ist Äquivalenzrelation

- reflexiv $x \equiv x$
- symmetrisch $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$
- transitiv $x \equiv y \wedge y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$

Äquivalente Zustände

Def.: Sei $A=(Q,\Sigma,\delta,q,F)$ dea. Für $q \in Q$ heisst

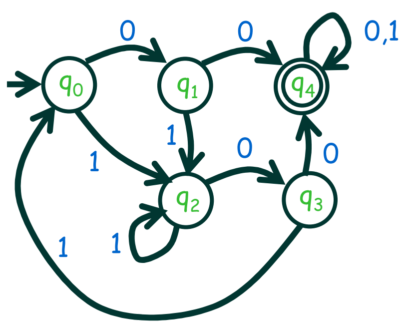
$$[q] := \{q' \in Q \mid q \equiv q'\}$$

Äquivalenzklasse von q und

$$Q' := Q/\equiv = \{[q] \mid q \in Q\}$$

bezeichnet die Menge der Äquivalenzklassen von $\equiv$

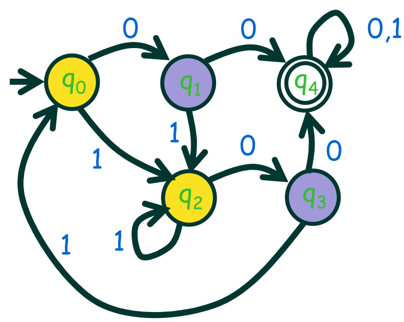
Bsp.: Äquivalenzklassen



$[q_0] = \{q_0, q_2\}$
$[q_1] = \{q_1, q_3\}$
$[q_4] = \{q_4\}$

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
0	-	F	-	F	F
1	-	-	-	-	F
00	F	F	F	F	F
01	-	F	-	F	F
10	-	-	-	-	F
11	-	-	-	-	F
000	F	F	F	F	F
001	F	F	F	F	F
010	-	F	-	F	F
011	-	F	-	F	F
100	F	F	F	F	F
101	-	-	-	-	F

Bsp.: Äquivalenzklassenautomat



Äquivalenzklassen und δ

Satz: Sei $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ dea.

Falls $q \equiv q'$, so ist $\forall a \in \Sigma\ \delta(q, a) \equiv \delta(q', a)$

$\forall a \in \Sigma\ \delta(q, a) \equiv \delta(q', a) \Leftrightarrow$

$\forall a \in \Sigma\ \forall w \in \Sigma^* : \delta^*(\delta(q, a),w) \in F$ gdw. $\delta^*(\delta(q', a),w) \in F \Leftrightarrow$

$\forall a \in \Sigma\ \forall w \in \Sigma^* : \delta^*(q,aw) \in F$ gdw. $\delta^*(q',aw) \in F \Leftrightarrow$

$\forall w' \in \Sigma^* : \delta^*(q,w') \in F$ gdw. $\delta^*(q',w') \in F \Leftrightarrow$

$q \equiv q'$

Äquivalenzklassenautomat

Def.: Sei $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ dea. Der dea

$$A_{\equiv} := (Q/{\equiv}, \Sigma, \delta_{\equiv}, [q_0], \{[q] \mid q \in F\})$$

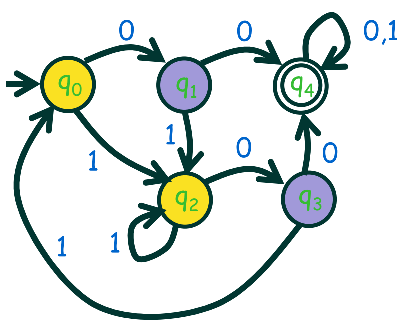
mit

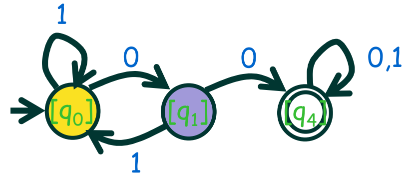
$$\delta_{\equiv}([q], a) := [\delta(q, a)]$$

heisst Äquivalenzklassenautomat von A

Bem.: $A_{\equiv}$ ist *wohldefiniert* !!

Bsp.: Äquivalenzklassenautomat





Äquivalenzklassenautomat

Satz: Sei $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ dea. Dann ist $L(A_\equiv) = L(A)$

Bew.: sei $w=w_1\dots w_n \in L(A)$

→ es gibt Folge von Zuständen $q_1,\dots,q_n$ mit
$q_n \in F$ und
$q_{i+1} = \delta(q_i, w_{i+1})$ für $0 \leq i < n$

z.z.: $[q_1],\dots,[q_n]$ ist Folge von Zuständen mit
$[q_n] \in \{[q] \mid q \in F\}$ und
$[q_{i+1}] = \delta_\equiv([q_i], w_{i+1})$ für $0 \leq i < n$

→ $w \in L(A_\equiv)$

Äquivalenzklassenautomat

z.z.: $[q_1],\dots,[q_n]$ ist Folge von Zuständen mit
$[q_n] \in \{[q] \mid q \in F\}$ und
$[q_{i+1}] = \delta_\equiv([q_i], w_{i+1})$ für $0 \leq i < n$

- $q_n \in F$ → $[q_n] \in \{[q] \mid q \in F\}$ und
- $\delta(q_i, w_{i+1}) = q_{i+1}$ → $\delta_\equiv([q_i], w_{i+1}) := [\delta(q_i, w_{i+1})] = [q_{i+1}]$

(Fall $w \in L^c(A)$ analog)

Berechnung des Äquivalenzautomaten

Problem: Wie berechnet man für einen dea A den Äquivalenz automaten $A_{\equiv}$ effizient?

Zeugen für Nichtäquivalenz

Def.: $q,q' \in Q$ sind nicht äquivalent $q \equiv^c q'$, wenn
$\exists w \in \Sigma^*$: $(\delta^*(q,w) \in F^c$ und $\delta^*(q',w) \in F)$ oder
$(\delta^*(q,w) \in F$ und $\delta^*(q',w) \in F^c)$

w heisst Zeuge für die Nichtäquivalenz von q,q'

Eigenschaften von kürzesten Zeugen

- ist $w=aw'$ kürzester Zeuge für $q \equiv^c q'$,
  so ist w' kürzester Zeuge für $\delta(q,a) \equiv^c \delta(q',a)$
- ist w' kürzester Zeuge für $\delta(q,a) \equiv^c \delta(q',a)$,
  so ist aw' Zeuge für $q \equiv^c q'$
- $|Q|^2$ ist obere Schranke für die
  Länge eines Zeugen für $q \equiv^c q'$

  von $(q,q') \in Q \times Q$ aus landet man nach $\leq 1+|Q|^2$ Schritten in einem Zustandspaar das man schon besucht hat

Idee zur Berechnung von $A_{\equiv}$

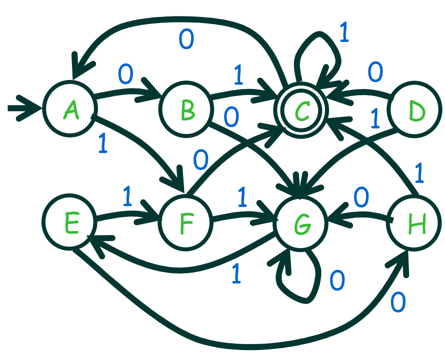
- alle Paare nicht äquivalenter Zustände, die Zeugen der Länge $\leq k$ haben, seien bekannt
- (p,q) hat Zeugen der Länge $\leq k+1$ falls
  $\exists a \in \Sigma$: $(\delta(p,a), \delta(q,a))$ hat Zeugen der Länge $\leq k$

Berechnung von $A_\equiv$

- erstelle Tabelle aller ungeordneten Zustandspaare $\{p,p'\}$
- markiere alle $\{p,p'\}$ mit

  $(p \in F^c$ und $p' \in F)$ oder $(p' \in F^c$ und $p \in F)$
- solange es ein unmarkiertes $\{p,p'\}$ und ein $a \in \Sigma$ gibt, so dass $\{\delta(p,a), \delta(p',a)\}$ bereits markiert ist, markiere $\{p,p'\}$
- bilde maximale Mengen (bzgl. Inklusion) von paarweise unmarkierten (d.h. äquivalenten) Zuständen

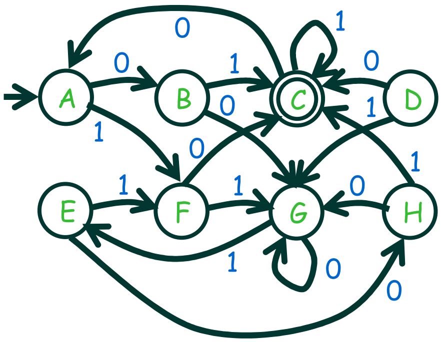
Bsp.: Berechnung von $A_\equiv$



B							
C							
D							
E							
F							
G							
H							
	A	B	C	D	E	F	G

Bsp.: Berechnung von $A_{\equiv}$

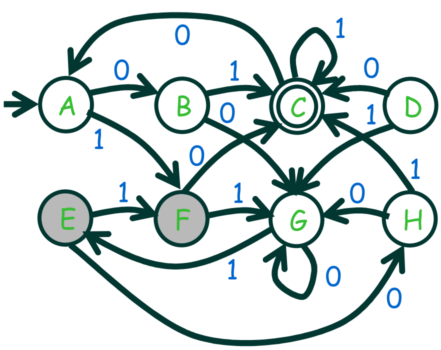
C einziger akzeptierender Zustand → markiere Zeile/Spalte C



B							
C	X	X					
D			X				
E			X				
F			X				
G			X				
H			X				
	A	B	C	D	E	F	G

Bsp.: Berechnung von $A_{\equiv}$

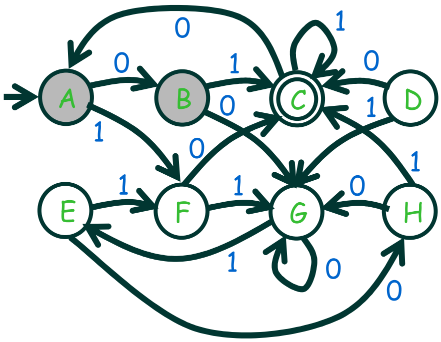
$\{E,F\} \rightarrow_0 \{C,H\}$ und $\{C,H\}$ markiert → markiere $\{E,F\}$



B							
C	X	X					
D			X				
E			X				
F			X		X		
G			X				
H			X				
	A	B	C	D	E	F	G

Bsp.: Berechnung von $A_\equiv$

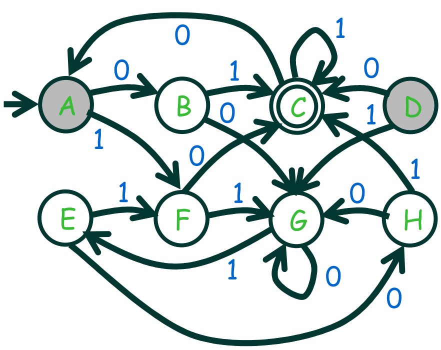
$\{A,B\} \to_1 \{C,F\}$ und $\{C,F\}$ markiert → markiere $\{A,B\}$



B	X						
C	X	X					
D			X				
E			X				
F			X		X		
G			X				
H			X				
	A	B	C	D	E	F	G

Bsp.: Berechnung von $A_\equiv$

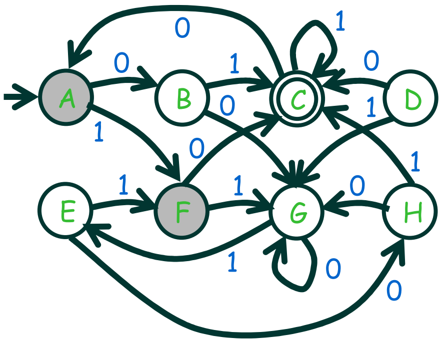
$\{A,D\} \to_0 \{B,C\}$ und $\{B,C\}$ markiert → markiere $\{A,D\}$



B	X						
C	X	X					
D	X		X				
E			X				
F			X		X		
G			X				
H			X				
	A	B	C	D	E	F	G

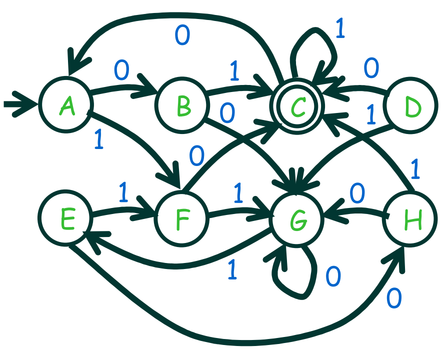
Bsp.: Berechnung von $A_\equiv$

$\{A,F\} \rightarrow_0 \{B,C\}$ und $\{B,C\}$ markiert $\rightarrow$ markiere $\{A,F\}$



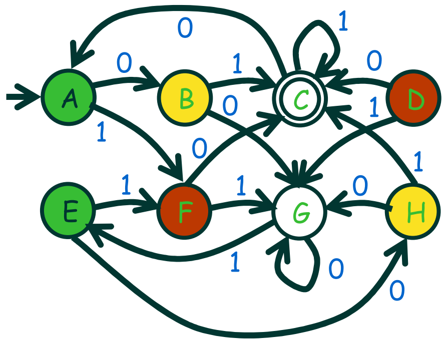
B	X						
C	X	X					
D	X		X				
E			X				
F	X		X		X		
G			X				
H			X				
	A	B	C	D	E	F	G

Bsp.: Berechnung von $A_\equiv$



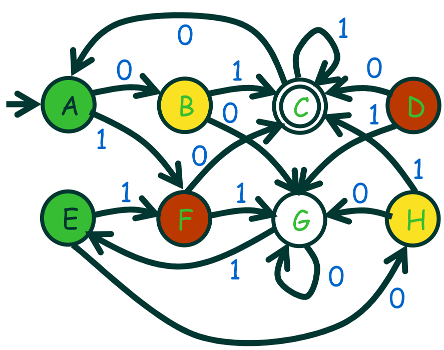
B	X						
C	X	X					
D	X	X	X				
E		X	X	X			
F	X	X	X		X		
G	X	X	X	X	X	X	
H	X		X	X	X	X	X
	A	B	C	D	E	F	G

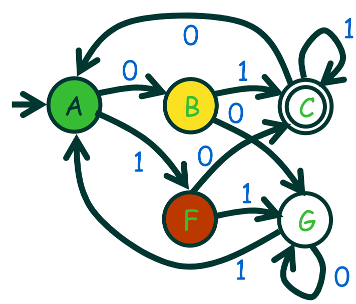
Bsp.: Berechnung von $A_{\equiv}$



B	X						
C	X	X					
D	X	X	X				
E		X	X	X			
F	X	X	X		X		
G	X	X	X	X	X	X	
H	X		X	X	X	X	X
	A	B	C	D	E	F	G

Bsp.: Berechnung von $A_{\equiv}$





Zur Berechnung von $A_{\equiv}$

- Korrektheit → *Übung*
- kann in $O(|Q|^2 \, |\Sigma|)$ Laufzeit implementiert werden