neas vs. deas

Frage: Gibt es zu jedem nea N einen dea D, so dass L(N)=L(D)?

Def.: Zwei Automaten M,N heissen äquivalent, wenn L(M)=L(N)

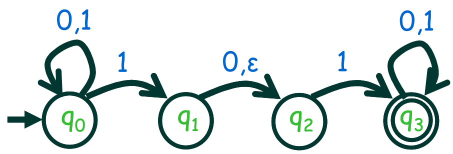
Berechnungbaum eines nea

$M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ nea und $w\in\Sigma^n$

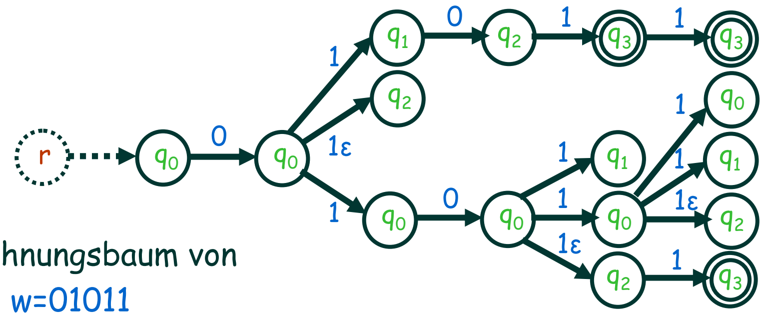
Berechnungsbaum von M auf der Eingabe w enthält alle möglichen Berechnungspfade von M auf w

- gerichteter Graph (Baum) $B_M(w)$
- ausgezeichnete Wurzel r
- Knoten (bis auf r) sind mit Zuständen aus Q beschriftet
- Kanten sind mit Wörtern aus $\Sigma\{\varepsilon\}^*$ beschriftet

Bsp.: Berechnungbaum eines nea



nea M



Berechnungsbaum von
M auf w=01011

ε–Abschluss

Def.: Sei $N=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ ein nea. Für $q \in Q$ und $R \subset Q$ heisst

$E(q) := \{q' \in Q \mid q'$ kann von q in 0 oder mehr ε-Schritten erreicht werden$\}$

$E(R) := \bigcup_{q \in R} E(q)$

der *ε–Abschluss* von q bzw. R

Def.: Berechnungbaum eines nea

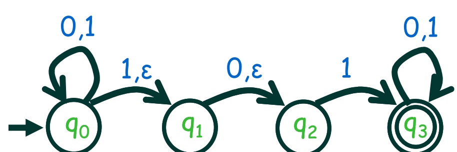
Def.: $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ nea und $w\in\Sigma^n$

Berechnungsbaum $T_M(w)$ von M auf w ist induktiv definiert:

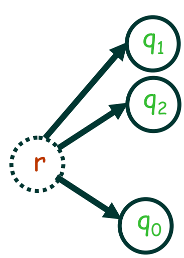
Falls $w=\varepsilon$, so

- besteht $T_M(w)$ aus einer (unbeschrifteten) Wurzel r and die für jeden Zustand $q'\in E(q_0)$ ein neues Blatt b' angehängt wird, welches mit q' beschriftet wird

Bsp.: Berechnungbaum eines nea



nea M



Berechnungsbaum von M auf $w=\varepsilon$

Def.: Berechnungbaum eines nea

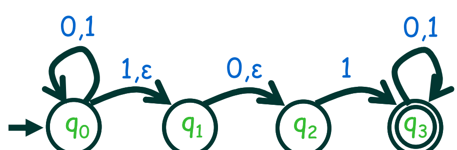
Def.: $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ nea und $w \in \Sigma^n$

Berechnungsbaum $T_M(w)$ von M auf w ist induktiv definiert:

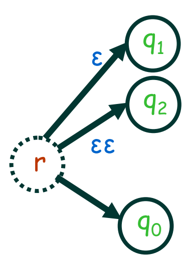
Falls $w=\varepsilon$, so

- besteht $T_M(w)$ aus einer (unbeschrifteten) Wurzel r and die für jeden Zustand $q' \in E(q_0)$ ein neues Blatt b' angehängt wird, welches mit q' beschriftet wird und
- die Kante (r,b') wird mit dem Wort $x' = x_0x_1x_2 \ldots x_m \in \{\varepsilon\}^*$ beschriftet, für das gilt: es gibt eine Folge von Zuständen $q_0=s_0,s_1,\ldots,s_m=q'$ aus Q, so dass $s_{i+1} \in \delta(s_i,x_{i+1})$ für $0 \le i < m$

Bsp.: Berechnungbaum eines nea



nea M



Berechnungsbaum von M auf $w=\varepsilon$

Def.: Berechnungbaum eines nea

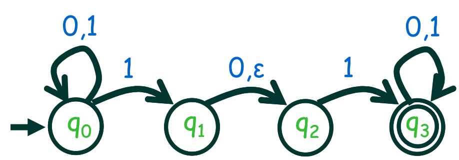
- Sei $w=ux$ mit $u \in \Sigma^{n-1}$ und $x \in \Sigma$ und $T_M(u)$ Berechnungsbaum von M auf u

  $T_M(w)$ entsteht aus $T_M(u)$ indem

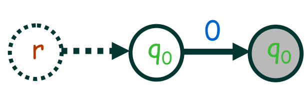
  - an jedes Blatt b von $T_M(u)$ das mit $q \in Q$ beschriftet ist, für jeden Zustand $q' \in E(\delta(q,x))$ ein neues Blatt b' angehängt wird, welches mit q' beschriftet wird

Bsp.: Berechnungbaum eines nea

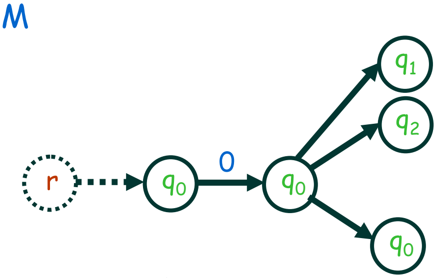
an jedes Blatt b von $T_M(u)$ das mit $q \in Q$ beschriftet ist, wird für jeden Zustand $q' \in E(\delta(q,x))$ ein neues Blatt b' angehängt, welches mit q' beschriftet wird



nea M



Berechnungsbaum von M auf $u=0$



Berechnungsbaum von M auf $w=01$

Def.: Berechnungbaum eines nea

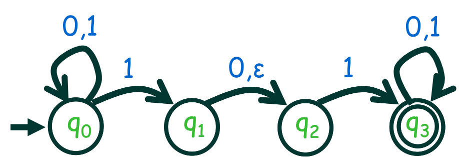
- Sei $w=ux$ mit $u\epsilon\Sigma^{n-1}$ und $x\epsilon\Sigma$ und $T_M(u)$ Berechnungsbaum von M auf u

  $T_M(w)$ entsteht aus $T_M(u)$ indem

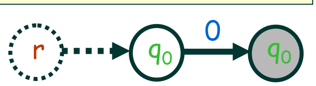
  - an jedes Blatt b von $T_M(u)$ das mit $q\epsilon Q$ beschriftet ist, für jeden Zustand $q'\epsilon E(\delta(q,x))$ ein neues Blatt b' angehängt wird, welches mit q' beschriftet wird und
  - die Kante (b,b') mit dem Wort $x' = x_0x_1x_2\ldots x_m \epsilon x\{\varepsilon\}^*$ beschriftet wird, für das gilt: es gibt eine Folge von Zuständen $q=s_0,s_1,\ldots,s_m=q'$ aus Q, so dass $s_{i+1}\epsilon\delta(s_i,x_{i+1})$ für $0 \leq i < m$

Bsp.: Berechnungbaum eines nea

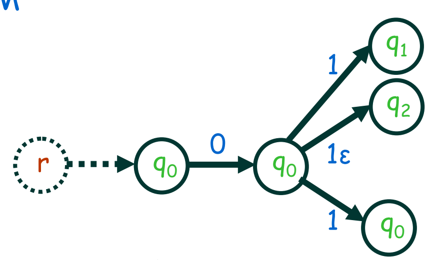
die Kante (b,b') wird mit dem Wort $x' = x_0x_1x_2\ldots x_m \epsilon x\{\varepsilon\}^*$ Beschriftet, für das gilt: es gibt eine Folge von Zuständen $q=s_0,s_1,\ldots,s_m=q'$ aus Q, so dass $s_{i+1}\epsilon\delta(s_i,x_{i+1})$ für $0 \leq i < m$



nea M



Berechnungsbaum von M auf u=0



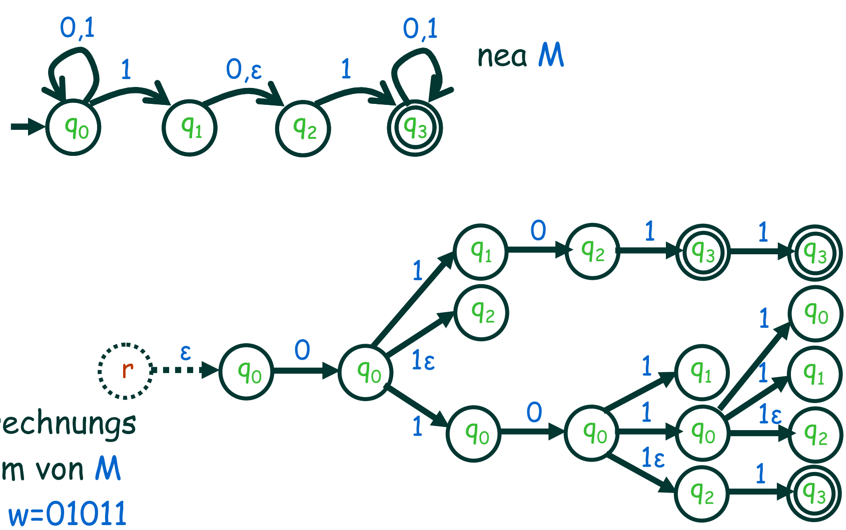
Berechnungsbaum von M auf w=01

neas vs. deas

Idee: Berechnungsbaum “sieht von Stufe zu Stufe aus” wie Pfad
→ lineares (deterministisches) Abarbeiten der Eingabe!

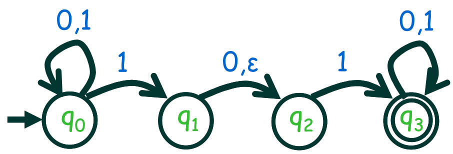
Stufe i := Menge der Knoten mit Abstand i von der Wurzel

Bsp.: neas vs. deas

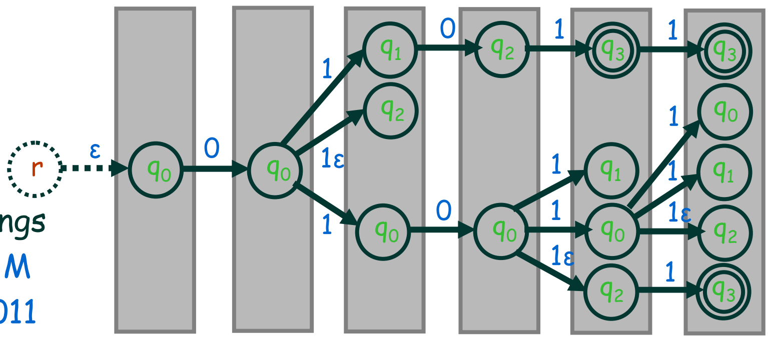


Berechnungs
baum von M
auf w=01011

Bsp.: neas vs. deas

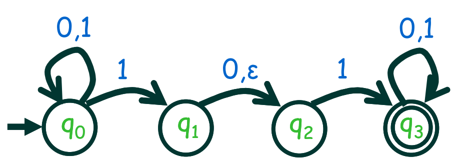


nea M

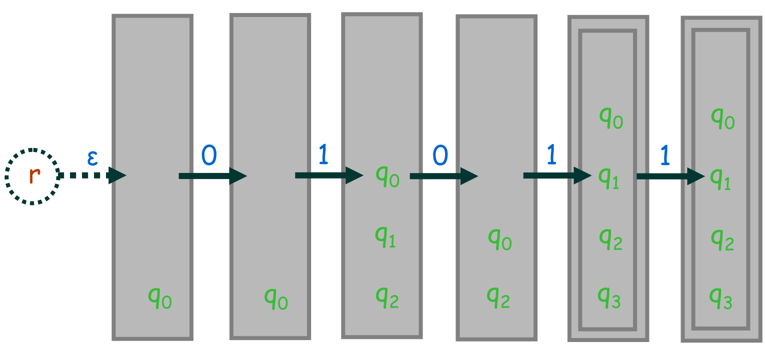


Berechnungs
baum von M
auf w=01011

Bsp.: neas vs. deas



nea M



neas vs. deas

Idee: Berechnungsbaum "sieht von Stufe zu Stufe aus" wie Pfad
→ lineares (deterministisches) Abarbeiten der Eingabe!

Konstruiere zu nea N einen äquivalenten dea D

Zustände von D = Stufen aller
Berechungsbäume von N
= Teilmengen der Zustände von N

Zustandsübergang in D von $S \subseteq Q$ nach $T \subseteq Q$ mittels $x \in \Sigma$, falls
T Nachfolgerstufe von S zum Symbol x in
einem Berechnungsbaum von N ist *wohldefiniert !*

nea-Sprachen sind dea-Sprachen

Satz: Zu jedem nea N gibt es einen dea D_N, so dass $L(N)=L(D_N)$

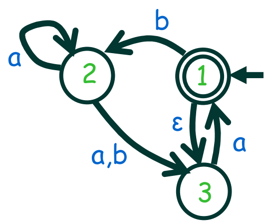
Genauer: Sei $N=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$.
Dann gilt für den dea $D_N=(2^Q,\Sigma,\delta',q'_0,F')$ mit

- $q'_0 := E(q_0)$
- für $x \in \Sigma$ und $R \in 2^Q$
  $\delta'(R,x) := \{q \in Q \mid q \in E(\delta(r,x))$ für ein $r \in R\}$
- $F' := \{R \in 2^Q \mid R \cap F \neq \{\}\}$

dass $L(N) = L(D_N)$

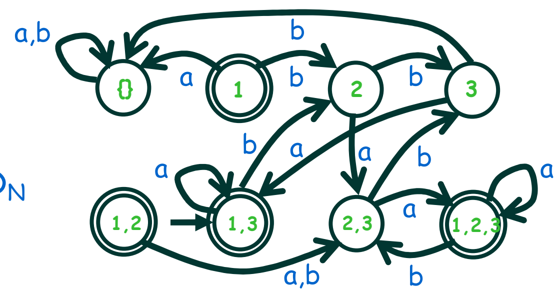
"Potenzmengenkonstruktion"

Bsp.: Potenzmengenkostruktion



nea N

$q'_0 := E(q_0)$
für $x \in \Sigma$ und $R \in 2^Q$
$\delta'(R,x) := \{q \in Q \mid$
$q \in E(\delta(r,x))$ für ein $r \in R\}$
$F' := \{R \in 2^Q \mid R \cap F \neq \{\}\}$



dea D_N

Bem. zur Potenzmengenkostruktion

- nicht erreichbare Zustände von D_N können weggelassen werden
- i. allg. wächst Anzahl der Zustände von D_N exponentiell

dea-Sprachen sind reguläre Sprachen

Satz: Zu jedem dea M gibt es einen regulären Ausdruck a_M, so dass $L(a_M) = L(M)$

Idee: rekursiver Aufbau eines regulären Ausdrucks a_M zu $M = (Q,\Sigma,\delta,q,F)$ mittels dynamischem Programmieren

Bew.: dea-Sprachen sind reguläre Sprachen

Bew.: sei o.B.d.A. $Q=\{1,\ldots,n\}$ und $q_0=1$

zeige, dass

$L^k_{i,j} := \{w \in \Sigma^* \mid \delta^*(i,w)=j$ und alle Zwischenzustände aus $\{1,\ldots,k\}\}$

regulär ist

$\rightarrow L(M) = \bigcup_{j \in F} L^n_{1,j}$ ist regulär

reguläre Sprachen sind unter Vereinigung abgeschlossen!

Bew.: dea-Sprachen sind reguläre Sprachen

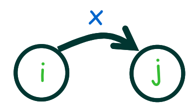
Bew.: zeige, dass

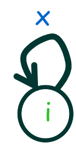
$L^k_{i,j} := \{w \epsilon \Sigma^* \mid \delta^*(i,w)=j$ und alle Zwischenzustände aus $\{1,\ldots,k\}\}$

regulär ist mittels dynamischem Programmieren

("*Lösung bottom-up berechnen*")

$k=0,\ i \neq j$ $\quad L^0_{i,j} = \{x \epsilon \Sigma \mid \delta(i,x)=j\}$ ist regulär (keine Zwischenzustände)

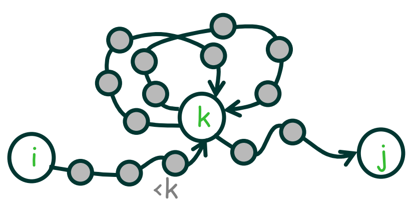




$i=j$ $\quad L^0_{i,i} = \{\varepsilon\} \cup \{x \epsilon \Sigma \mid \delta(i,x)=i\}$ ist regulär

Bew.: dea-Sprachen sind reguläre Sprachen

Bew.: $k>0$ $\quad L^k_{i,j} = L^{k-1}_{i,j} \cup L^{k-1}_{i,k} \circ (L^{k-1}_{k,k})^* \circ L^{k-1}_{k,j}$ ist regulär



von i nach j gelangt man mittels 1,…,k

- entweder ohne k zu benutzen,
- oder man geht mittels 1,…,k-1
  - zuerst von i nach k
  - dann beliebig oft von k nach k
  - und schliesslich von k nach j

Fazit

regulare Sprachen =

von regulären Ausdrücken definierte Sprachen =

dea-Sprachen =

nea-Sprachen

Folgerung: Abschlusseigenschaften für reguläre Sprachen

- reguläre Operationen: $\cup, \circ, *$
- Durchschnitt: $\cap$
- Komplementbildung: L regulär → $L^c = \Sigma^* \setminus L$ regulär
- "von hinten lesen": L regulär → $L^{rev} = \{w \in \Sigma^* \mid w^{rev} \in L\}$ regulär (falls $w = w_1 w_2 \ldots w_n$, so ist $w^{rev} := w_n \ldots w_2 w_1$)
- ...