Vorlesung vom 28.04.06
Skript erstellt von *Antonia Wittmers und Maria Gensel*

0.1 Modellierung von Kurven und Flächen mittels B-Splines

Das Wort Spline, übersetzt mit „längliches, dünnes Stück Holz oder Metall“ kommt aus dem Schiffbau, wobei dünne, elastische Holz- oder Metalllatten an einzelnen Punkten durch Nägel fixiert, zur Festlegung der Kontur unter Spannung benutzt werden.
Hier bezeichnet ein Spline n-ten Grades eine Funktion, die stückweise aus Polynomen mit maximalem Grad n zusammengesetzt ist.

B-Splines sind die meist genutzte Möglichkeit Splines anzunähern. Dies geschieht durch Approximation vorgegebener Punkte mit Hilfe von Gewichtsfunktionen, wobei der erste und letzte Punkt Anfangs- und Endpunkt der Kurve sein können. Gegeben sind n+1 vom Benutzer gewählte Punkte in der Ebene, $p_0, \cdots, p_n$, die sogenannten Kontrollpunkte. Gesucht ist eine möglichst glatte Kurve (etwa C^2-stetig), die in der Nähe dieser Kontrollpunkte verläuft und sich durch Verschieben der Kontrollpunkte lokal verändern läßt. Neben den B-Splines gibt es unter anderen die Bezier-Splines. Die B-Splines haben jedoch gegenüber den Bezier-Splines den Vorteil, daß der Grad der Polynome unabhängig von der Anzahl der Kontrollpunkte und eine lokale Kontrolle möglich ist.
Anwendung finden B-Splines in CAED (computer aided geometry design) Programmen. Dort werden sie z.B. für das Modellieren von Karosserien verwendet.

C^0 bedeutet, dass es sich um stetige Kurven handelt, C^1-Kurven sind mindestens einmal stetig differenzierbar und die Richtung ändert sich stetig. Bei C^2-Kurven ändern sich die Richtung und Krümmung stetig. Die 2.Ableitung einer Kurve entspricht der Krümmung.

Als Ansatz für B-Spline-Kurven nehmen wir parametrisierte Kurven. Damit lautet die Kurvendarstellung

$$\underline{c}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,k}(t) \cdot \underline{p}_i \ , \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

wobei $B_{i,k}(t) : \Re \rightarrow \Re$ mit i=0,...,n Funktionen in C^{k-2} sind. Die $B_{i,k}(t)$ werden auch B-Spline-Basisfunktionen genannt. Für jedes t ist $\underline{c}(t)$ die gewichtete Summe der Kontrollpunkte.

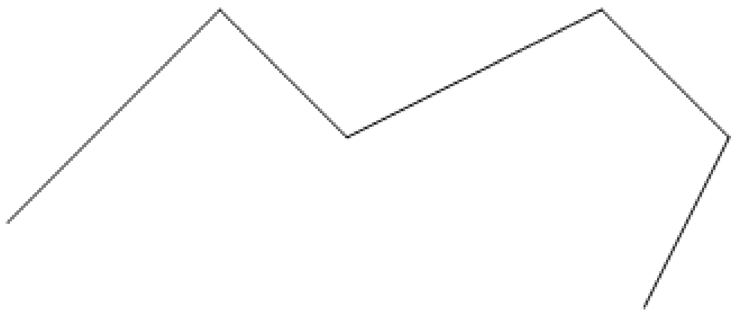


Abbildung 1: C^0-stetige Kurve

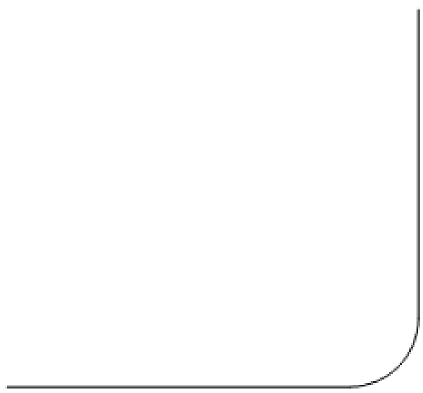


Abbildung 2: C^1-stetige Kurve aus Strecken und Viertelkreis

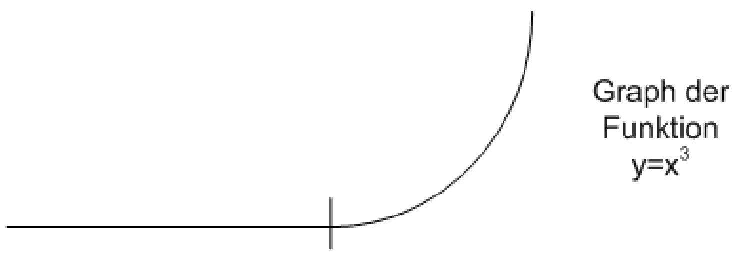


Abbildung 3: C^2-stetige Kurve

Die Funktionen sollen gewissen Anforderungen genügen. Es sollte

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,k}(t) = 1 \tag{2}$$

und

$$\underline{c}(t) \in C^{k-2} \tag{3}$$

gelten.
Alle B-Spline-Basisfunktionen der Ordnung k können rekursiv aus den Basisfunktionen der Ordnung k-1 gewonnen werden. Also gilt

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \cdot B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,k-1}(t).$$

Das Intervall [0,1] wird dabei in n+k Teilintervalle geteilt.

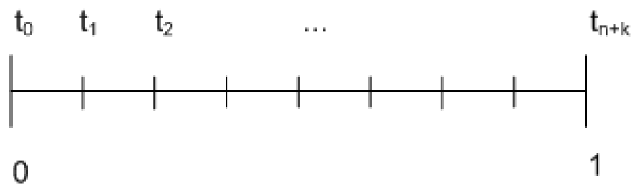


Abbildung 4: Unterteilung des Intervalls in n+k Teilintervalle

Die B-Spline-Basisfunktionen $B_{i,1}(t)$ der Ordnung 1 sind Rechteckfunktionen der Höhe 1 über dem Intervall $[t, t_{i+1}]$. Sie sind stückweise konstant und außerhalb des Intervalls identisch Null. Die Funktionen $B_{i,1}(t) \in C^{-1}$ sind unstetig.

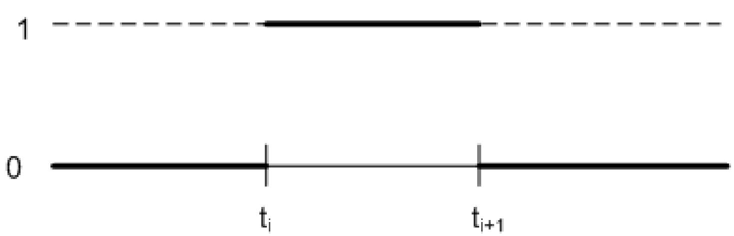
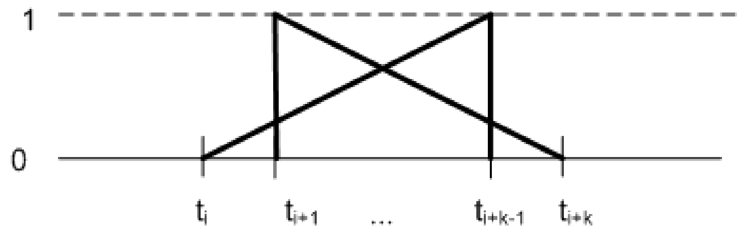


Abbildung 5: B-Spline-Basisfunktionen $B_{i,1}(t)$ der Ordnung 1



B-Spline-Basisfunktionen $B_{i,2}(t)$ der Ordnung 2, k ist also 2, sind Dreiecksfunktionen über dem Intervall $[t, t_{i+2}]$. Die Rekursionsgleichung lautet:

$$B_{i,2}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot B_{i,1}(t) + \frac{t_{i+2} - t}{t_{i+2} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,1}(t)$$

Diese Funktionen sind stückweise linear und außerhalb des Intervalls identisch Null. Die $B_{i,2}(t) \in C^0$ sind stetig.

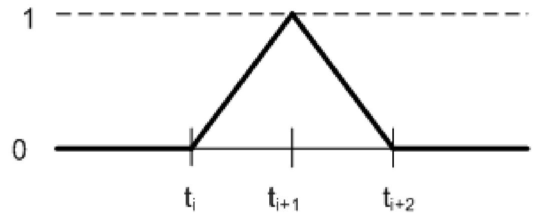


Abbildung 6: B-Spline-Basisfunktionen $B_{i,2}(t)$ der Ordnung 2

Für $k = 3$ sind die Basisfunkionen $B_{i,3}(t)$ der Ordnung 3 Hütchenfunktionen mit der Rekursionsgleichung

$$B_{i,3}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+2} - t_i} \cdot B_{i,2}(t) + \frac{t_{i+3} - t}{t_{i+3} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,2}(t).$$

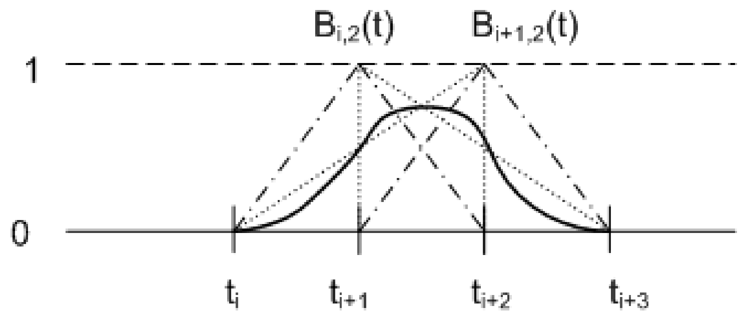


Abbildung 7: B-Spline-Basisfunktionen $B_{i,3}(t)$ der Ordnung 3

Die $B_{i,3}(t) \in C^1$ sind stückweise quadratisch und an den Grenzen der Stücke gehen sie glatt ineinander über. Außerhalb des Intervalls $[t_i, t_{i+3}]$ sind sie identisch Null. Für $n = 4$ ist $B_{0,3}(t)$ symmetrisch zu $B_{4,3}(t)$ und $B_{1,3}(t)$ zu $B_{3,3}(t)$.
Allgemein gilt, dass $B_{0,3}(t)$ symmetrisch zu $B_{n,3}(t)$ und $B_{1,3}(t)$ zu $B_{n-1,3}(t)$ ist.

Für alle anderen Basisfunktionen gilt es analog, so dass die $B_{i,k}(t)$ stückweise polynomiell vom Grad $k-1 \in C^{k-2}$ und identisch Null außerhalb von $[t_i, t_{i+k}]$ sind. Um zu erreichen, dass die Basisfunktionen eine Teilung der 1 bilden, also dass $\sum_{i=0}^{n} B_{i,k}(t) = 1$ für alle t gilt, setzen wir $t_0 = t_1 = t_2 = \cdots = t_{k-1} = 0$ und analog $t_{n+1} = t_{n+2} = \cdots = t_{n+k} = 1$.
Im Inneren wäre es erfüllt gewesen, aber am Anfang und Ende des Intervalls [0,1] würde es sonst noch nicht stimmen.
Der Punkt P_i mit den Koeffizienten $B_{i,k}(t)$ hat nur auf das Intervall $[t_i, t_{i+k}]$ Einfluss. Umgekehrt ist es so, dass für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ nur die Punkte $P_{i-k+1}, ..., P_i$ relevant sind. Punkte auf der Kurve $\underline{c}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,k}(t) \cdot \underline{p}_i$ sind eine Konvexkombination dieser Punkte. Eine Konvexkombination ist die Linearkombination, wobei die Summe der Koeffizienten gleich 1 ist. Punkte in dem Dreieck sind genau die Punkte, die sich durch die Konvexkombination der Eckpunkte bilden lassen.

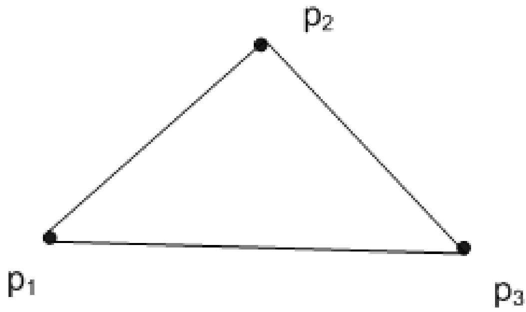


Abbildung 8: Konvexe Hülle der Punkte $P_1, \cdots, P_3$

Die Konvexkombination von $P_1, ..., P_n$ bilden die konvexe Hülle von $P_1, ..., P_n$, d.h. die kleinste konvexe Menge, die $P_1, ..., P_n$ enthält.

Also liegt die Kurve $\underline{c}(t)$ für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ in der konvexen Hülle von $P_{i-k+1}, ..., P_i$. Die Kurve insgesamt liegt in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte.

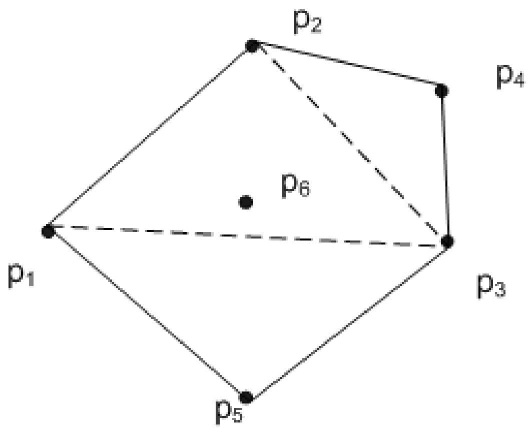


Abbildung 9: Konvexe Hülle der Punkte $P_1, \cdots, P_6$

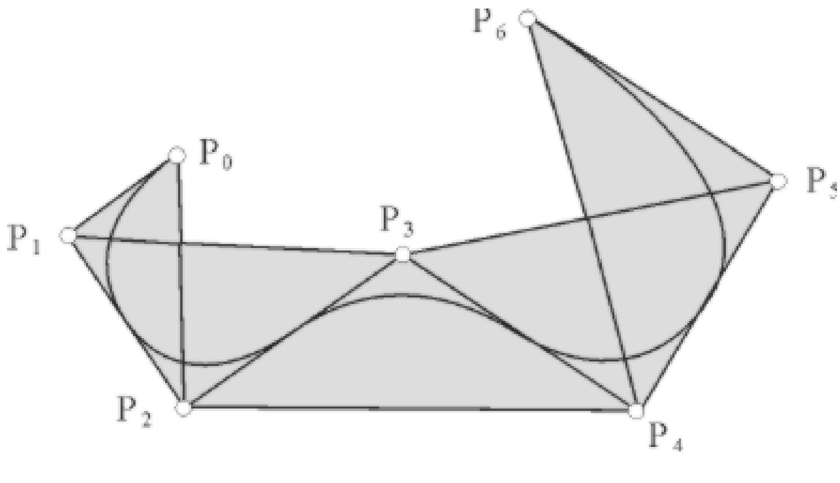


Abbildung 10: Kurve liegt in der konvexen Hülle des Kontrollpolygons

0.1.1 B-Splineflächen im 3dim. Raum

$$a : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$\underline{a}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \underline{p}_{ij} \cdot B_{i,k}(u) \cdot B_{j,k}(v),$$

wobei p_{ij} die Kontrollpunkte sind und $0 \leq i,j \leq n$ gilt.