

# SUDOKU

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 9 | 8 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | 8 | 9 | 6 | 7 |
| 7 | 2 | 3 | 6 | 1 | 9 | 8 | 5 | 4 |
| 1 | 3 | 7 | 9 | 5 | 4 | 6 | 2 | 8 |
| 8 | 6 | 5 | 1 | 7 | 2 | 4 | 9 | 3 |
| 9 | 4 | 2 | 3 | 8 | 6 | 1 | 7 | 5 |
| 3 | 8 | 6 | 4 | 2 | 7 | 5 | 1 | 9 |
| 2 | 5 | 1 | 8 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 |
| 4 | 7 | 9 | 5 | 6 | 1 | 3 | 8 | 2 |

# SUDOKU

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 9 | 8 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | 8 | 9 | 6 | 7 |
| 7 | 2 | 3 | 6 | 1 | 9 | 8 | 5 | 4 |
| 1 | 3 | 7 | 9 | 5 | 4 | 6 | 2 | 8 |
| 8 | 6 | 5 | 1 | 7 | 2 | 4 | 9 | 3 |
| 9 | 4 | 2 | 3 | 8 | 6 | 1 | 7 | 5 |
| 3 | 8 | 6 | 4 | 2 | 7 | 5 | 1 | 9 |
| 2 | 5 | 1 | 8 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 |
| 4 | 7 | 9 | 5 | 6 | 1 | 3 | 8 | 2 |

- Jede **Zeile** und
  - jede **Spalte**
- enthält jeder Ziffer genau einmal.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 9 | 8 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | 8 | 9 | 6 | 7 |
| 7 | 2 | 3 | 6 | 1 | 9 | 8 | 5 | 4 |
| 1 | 3 | 7 | 9 | 5 | 4 | 6 | 2 | 8 |
| 8 | 6 | 5 | 1 | 7 | 2 | 4 | 9 | 3 |
| 9 | 4 | 2 | 3 | 8 | 6 | 1 | 7 | 5 |
| 3 | 8 | 6 | 4 | 2 | 7 | 5 | 1 | 9 |
| 2 | 5 | 1 | 8 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 |
| 4 | 7 | 9 | 5 | 6 | 1 | 3 | 8 | 2 |

- Jede **Zeile** und
  - jede **Spalte**
- enthält jeder Ziffer genau einmal.
- Jeder  **$3 \times 3$ -Block**
- enthält jeder Ziffer genau einmal.

# Sudoku-Rätsel

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   | 8 |   |   | 5 | 2 |   | 1 |
|   | 1 | 4 | 2 |   |   |   |   | 7 |
| 7 |   |   |   | 1 | 9 | 8 |   |   |
| 1 |   |   |   |   | 4 | 6 | 2 |   |
|   | 6 | 5 |   | 7 |   |   |   | 3 |
|   | 4 |   | 3 | 8 |   |   | 7 |   |
| 3 | 8 |   | 4 |   |   |   | 1 |   |
| 2 |   |   |   | 9 |   | 7 |   | 6 |
|   |   | 9 | 5 |   | 1 |   | 8 |   |

Einige Felder sind vorgegeben.

Finde die übrigen Felder!

Ein richtiges Sudoku-Rätsel hat eine *eindeutige* Lösung.

# Sudoku-Rätsel

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   | 8 |   |   | 5 | 2 |   | 1 |
|   | 1 | 4 | 2 |   |   |   |   | 7 |
| 7 |   |   |   | 1 | 9 | 8 |   |   |
| 1 |   |   |   |   | 4 | 6 | 2 |   |
|   | 6 | 5 |   | 7 |   |   |   | 3 |
|   | 4 |   | 3 | 8 |   |   | 7 |   |
| 3 | 8 |   | 4 |   |   |   | 1 |   |
| 2 |   |   |   | 9 |   | 7 |   | 6 |
|   |   | 9 | 5 |   | 1 |   | 8 |   |

Einige Felder sind vorgegeben.

Finde die übrigen Felder!

Ein richtiges Sudoku-Rätsel hat eine *eindeutige* Lösung.



Wo kann die 1 in diesem Block stehen?

# Sudoku-Rätsel

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   | 8 |   |   | 5 | 2 |   | 1 |
|   | 1 | 4 | 2 |   |   |   |   | 7 |
| 7 |   |   |   | 1 | 9 | 8 |   |   |
| 1 |   |   |   |   | 4 | 6 | 2 |   |
|   | 6 | 5 |   | 7 |   |   |   | 3 |
|   | 4 |   | 3 | 8 |   |   | 7 |   |
| 3 | 8 |   | 4 |   |   |   | 1 |   |
| 2 |   |   |   | 9 |   | 7 |   | 6 |
|   |   | 9 | 5 |   | 1 |   | 8 |   |

Einige Felder sind vorgegeben.

Finde die übrigen Felder!

Ein richtiges Sudoku-Rätsel hat eine *eindeutige* Lösung.



Wo kann die 1 in diesem Block stehen?

# Sudoku-Rätsel

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   | 8 |   |   | 5 | 2 |   | 1 |
|   | 1 | 4 | 2 |   |   |   |   | 7 |
| 7 |   |   |   | 1 | 9 | 8 |   |   |
| 1 |   |   |   |   | 4 | 6 | 2 |   |
|   | 6 | 5 |   | 7 |   |   |   | 3 |
|   | 4 |   | 3 | 8 |   |   | 7 |   |
| 3 | 8 |   | 4 |   |   |   | 1 |   |
| 2 |   | 1 |   | 9 |   | 7 |   | 6 |
|   |   | 9 | 5 |   | 1 |   | 8 |   |

Einige Felder sind vorgegeben.

Finde die übrigen Felder!

Ein richtiges Sudoku-Rätsel hat eine *eindeutige* Lösung.



Wo kann die 1 in diesem Block stehen?

# Sudoku-Rätsel

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   | 8 |   |   | 5 | 2 |   | 1 |
|   | 1 | 4 | 2 |   |   |   |   | 7 |
| 7 |   |   |   | 1 | 9 | 8 |   |   |
| 1 |   |   |   |   | 4 | 6 | 2 |   |
|   | 6 | 5 |   | 7 |   |   |   | 3 |
|   | 4 |   | 3 | 8 |   |   | 7 |   |
| 3 | 8 |   | 4 |   |   |   | 1 |   |
| 2 |   | 1 |   | 9 |   | 7 |   | 6 |
|   |   | 9 | 5 |   | 1 |   | 8 |   |

Einige Felder sind vorgegeben.

Finde die übrigen Felder!

Ein richtiges Sudoku-Rätsel hat eine *eindeutige* Lösung.

# Sudoku-Rätsel

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   | 8 |   |   | 5 | 2 |   | 1 |
|   | 1 | 4 | 2 |   |   |   |   | 7 |
| 7 |   |   |   | 1 | 9 | 8 |   |   |
| 1 |   |   |   |   | 4 | 6 | 2 |   |
|   | 6 | 5 |   | 7 |   |   |   | 3 |
|   | 4 |   | 3 | 8 |   |   | 7 |   |
| 3 | 8 |   | 4 |   |   |   | 1 |   |
| 2 |   | 1 |   | 9 |   | 7 |   | 6 |
|   |   | 9 | 5 |   | 1 |   | 8 |   |

Einige Felder sind vorgegeben.

Finde die übrigen Felder!

Ein richtiges Sudoku-Rätsel hat eine *eindeutige* Lösung.

Welche Ziffer kann in diesem Feld stehen?

1 2 3 4 5 6 7 8 9

# Sudoku-Rätsel

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   | 8 |   |   | 5 | 2 |   | 1 |
|   | 1 | 4 | 2 |   |   |   |   | 7 |
| 7 |   |   |   | 1 | 9 | 8 |   |   |
| 1 |   |   |   |   | 4 | 6 | 2 |   |
|   | 6 | 5 |   | 7 |   |   |   | 3 |
|   | 4 |   | 3 | 8 |   |   | 7 |   |
| 3 | 8 |   | 4 |   |   |   | 1 |   |
| 2 |   | 1 |   | 9 |   | 7 |   | 6 |
|   |   | 9 | 5 |   | 1 |   | 8 |   |

Einige Felder sind vorgegeben.

Finde die übrigen Felder!

Ein richtiges Sudoku-Rätsel hat eine *eindeutige* Lösung.

Welche Ziffer kann in diesem Feld stehen?

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 5 6 7 ~~8~~ ~~9~~

# Sudoku-Rätsel

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   | 8 |   |   | 5 | 2 |   | 1 |
|   | 1 | 4 | 2 |   |   |   |   | 7 |
| 7 |   |   |   | 1 | 9 | 8 |   |   |
| 1 |   |   |   |   | 4 | 6 | 2 |   |
|   | 6 | 5 |   | 7 |   |   |   | 3 |
|   | 4 |   | 3 | 8 |   |   | 7 |   |
| 3 | 8 |   | 4 |   |   |   | 1 |   |
| 2 |   | 1 |   | 9 |   | 7 |   | 6 |
|   |   | 9 | 5 |   | 1 |   | 8 |   |

Einige Felder sind vorgegeben.

Finde die übrigen Felder!

Ein richtiges Sudoku-Rätsel hat eine *eindeutige* Lösung.

Welche Ziffer kann in diesem Feld stehen?

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 5 ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~

# Sudoku-Rätsel

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   | 8 |   |   | 5 | 2 |   | 1 |
|   | 1 | 4 | 2 |   |   |   |   | 7 |
| 7 |   |   |   | 1 | 9 | 8 |   |   |
| 1 |   |   |   |   | 4 | 6 | 2 |   |
|   | 6 | 5 |   | 7 |   |   |   | 3 |
|   | 4 |   | 3 | 8 |   |   | 7 |   |
| 3 | 8 |   | 4 |   |   |   | 1 |   |
| 2 |   | 1 |   | 9 |   | 7 |   | 6 |
|   |   | 9 | 5 |   | 1 |   | 8 |   |

Einige Felder sind vorgegeben.

Finde die übrigen Felder!

Ein richtiges Sudoku-Rätsel hat eine *eindeutige* Lösung.

Welche Ziffer kann in diesem Feld stehen?

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ 5 ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~

# Sudoku-Rätsel

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   | 8 |   |   | 5 | 2 |   | 1 |
|   | 1 | 4 | 2 |   |   |   |   | 7 |
| 7 |   |   |   | 1 | 9 | 8 |   |   |
| 1 |   |   |   |   | 4 | 6 | 2 |   |
|   | 6 | 5 |   | 7 |   |   |   | 3 |
|   | 4 |   | 3 | 8 |   |   | 7 |   |
| 3 | 8 |   | 4 |   |   |   | 1 |   |
| 2 | 5 | 1 |   | 9 |   | 7 |   | 6 |
|   |   | 9 | 5 |   | 1 |   | 8 |   |

Einige Felder sind vorgegeben.

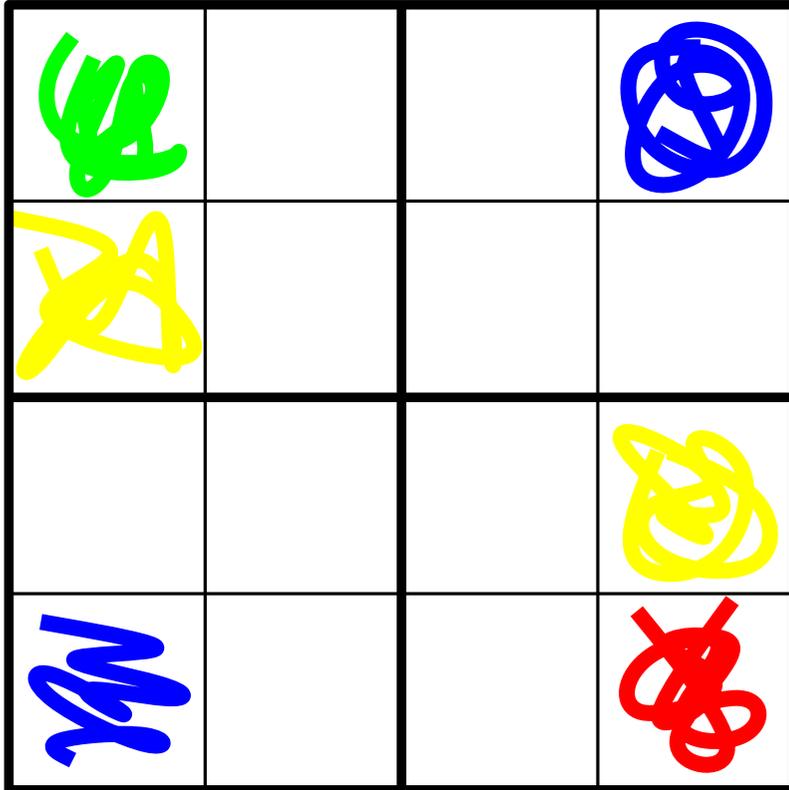
Finde die übrigen Felder!

Ein richtiges Sudoku-Rätsel hat eine *eindeutige* Lösung.

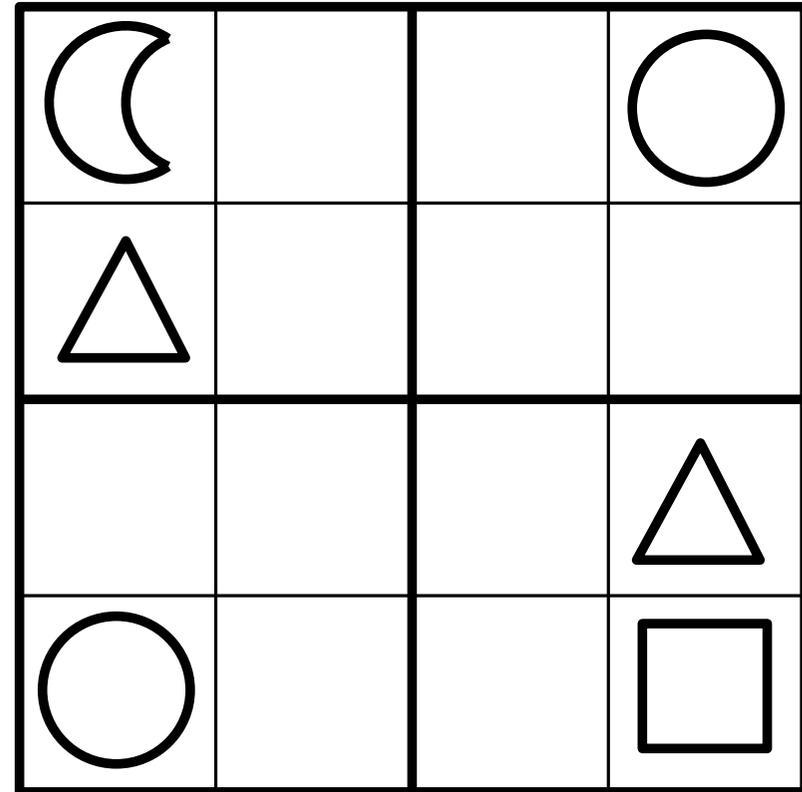
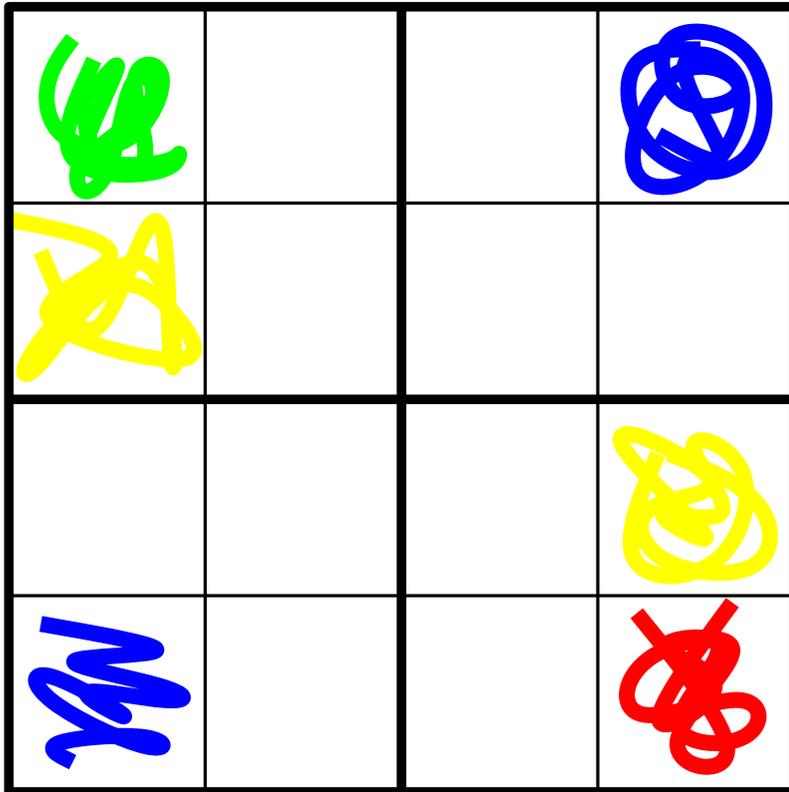
Welche Ziffer kann in diesem Feld stehen?

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ 5 ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~

# Keine Mathematik!



# Keine Mathematik!



- Was ist Sudoku?
- ein bisschen Geschichte
- lateinische Quadrate und Stundenpläne
- Lösung als lineares Ungleichungssystem
- Lösung durch logisches Schließen
- Lösung durch Probieren
- Wieviele Sudoku-Gitter gibt es?

- Mai 1979: In *Dell Pencil Puzzles & Word Games* erschienen die beiden ersten Sudoku-Rätsel unter dem Titel *Number Place*.
- Erfinder: Howard Garns, ein 74-jähriger ehemaliger Architekt, gestorben 1989

- Mai 1979: In *Dell Pencil Puzzles & Word Games* erschienen die beiden ersten Sudoku-Rätsel unter dem Titel *Number Place*.
- Erfinder: Howard Garns, ein 74-jähriger ehemaliger Architekt, gestorben 1989
- April 1984: Der japanische Rätsel-Verlag *Nikoli* verbreitet das Rätsel unter dem Namen *suji wa dokushin ni kagiru*: Die Ziffern müssen einzeln stehen.

- Mai 1979: In *Dell Pencil Puzzles & Word Games* erschienen die beiden ersten Sudoku-Rätsel unter dem Titel *Number Place*.
  - Erfinder: Howard Garns, ein 74-jähriger ehemaliger Architekt, gestorben 1989
  - April 1984: Der japanische Rätsel-Verlag *Nikoli* verbreitet das Rätsel unter dem Namen *suji wa dokushin ni kagiru*: Die Ziffern müssen einzeln stehen. Der abgekürzte Name *Sudoku* ist in Japan ein geschütztes Markenzeichen von Nikoli.
- In japanischen Zeitschriften wird Sudoku daher oft mit dem englischen Namen *Number Place* bezeichnet.
- *nan-ba-pu-re-su* → abgekürzt *nanpure*

- Der Neuseeländer Wayne Gould (ein pensionierter Richter aus Hongkong) entwickelt in mehrjähriger Arbeit ein Computerprogramm zur Erstellung von Sudoku-Rätseln.
- Ende 2004 erscheinen die ersten Sudokus von Wayne Gould in der Londoner *Times*. Wenig später zieht der *Guardian* mit Sudokus von *Nikoli* nach.
- März 2006: erste Soduko-Weltmeisterschaft in Lucca

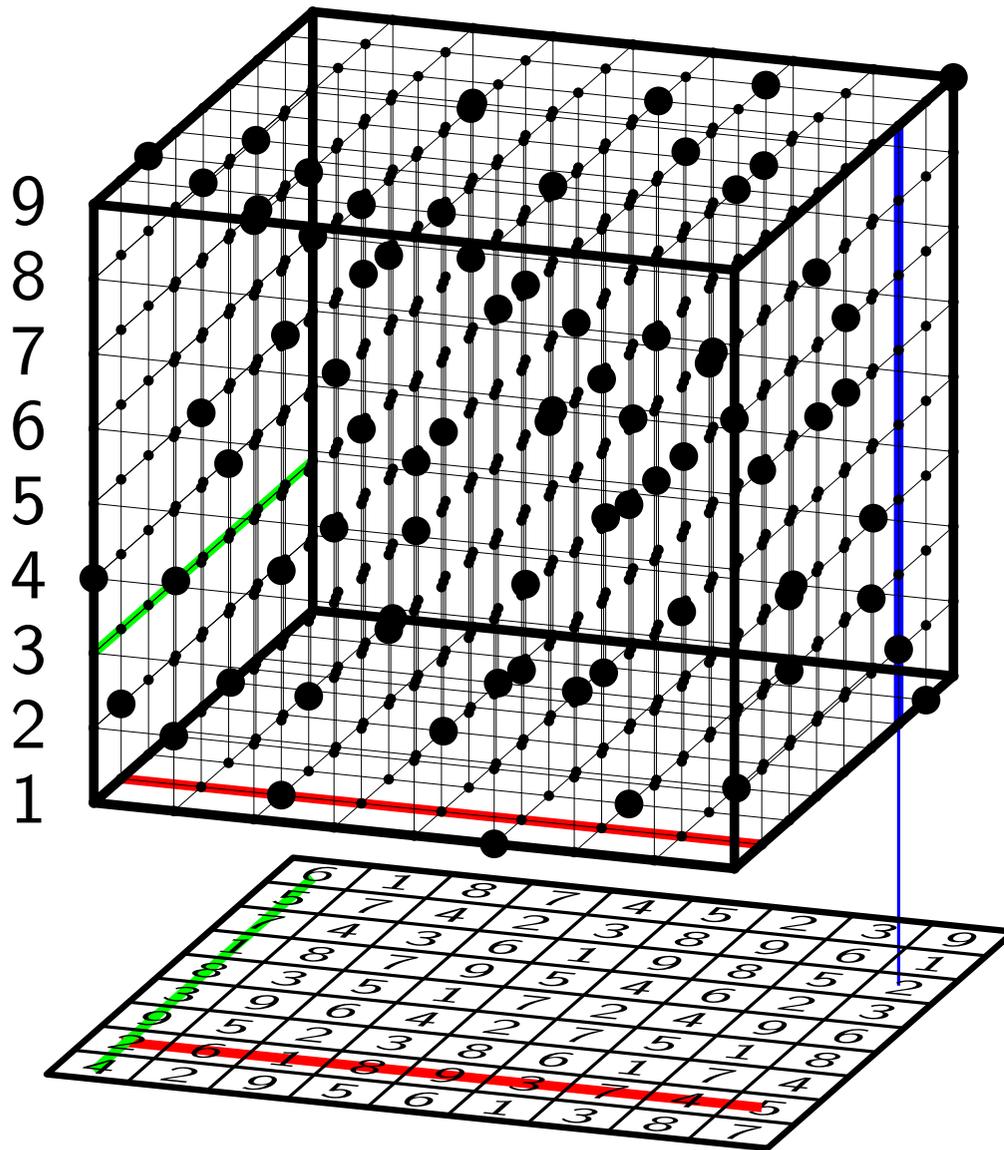
# Lateinische Quadrate

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 9 |
| 5 | 7 | 4 | 2 | 3 | 8 | 9 | 6 | 1 |
| 7 | 4 | 3 | 6 | 1 | 9 | 8 | 5 | 2 |
| 1 | 8 | 7 | 9 | 5 | 4 | 6 | 2 | 3 |
| 8 | 3 | 5 | 1 | 7 | 2 | 4 | 9 | 6 |
| 3 | 9 | 6 | 4 | 2 | 7 | 5 | 1 | 8 |
| 9 | 5 | 2 | 3 | 8 | 6 | 1 | 7 | 4 |
| 2 | 6 | 1 | 8 | 9 | 3 | 7 | 4 | 5 |
| 4 | 2 | 9 | 5 | 6 | 1 | 3 | 8 | 7 |

- Jede **Zeile** und
  - jede **Spalte**
- enthält jeder Ziffer genau einmal.

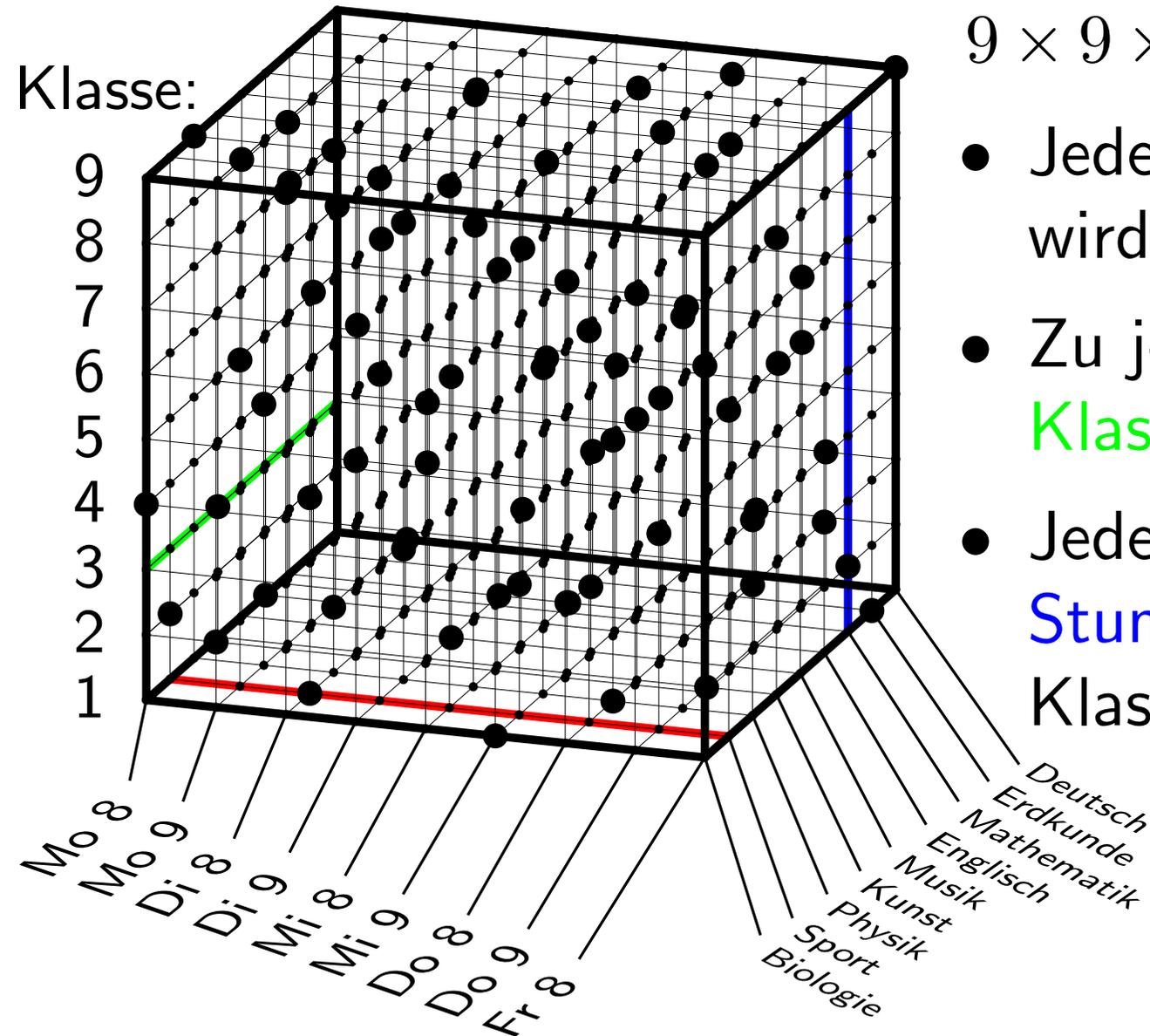
$3 \times 3$ -Blöcke spielen keine Rolle

erstmal 1783 vom Mathematiker Leonhard Euler untersucht.



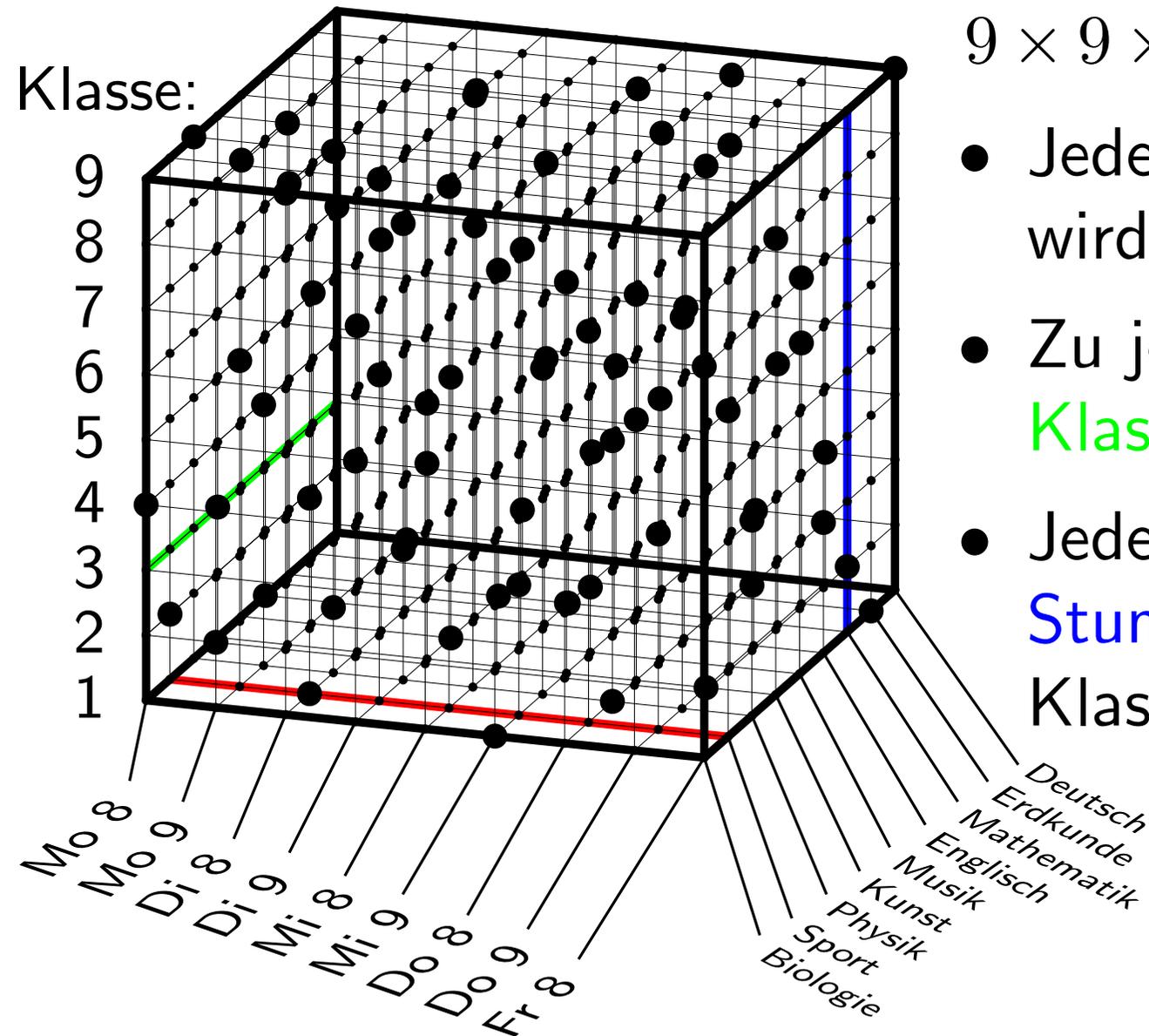
$9 \times 9 \times 9$  Gitterwürfel

- Jede horizontale **Zeile**,
- jede horizontale **Spalte**, und
- jede senkrechte **Säule**  
enthält genau einen Knoten.



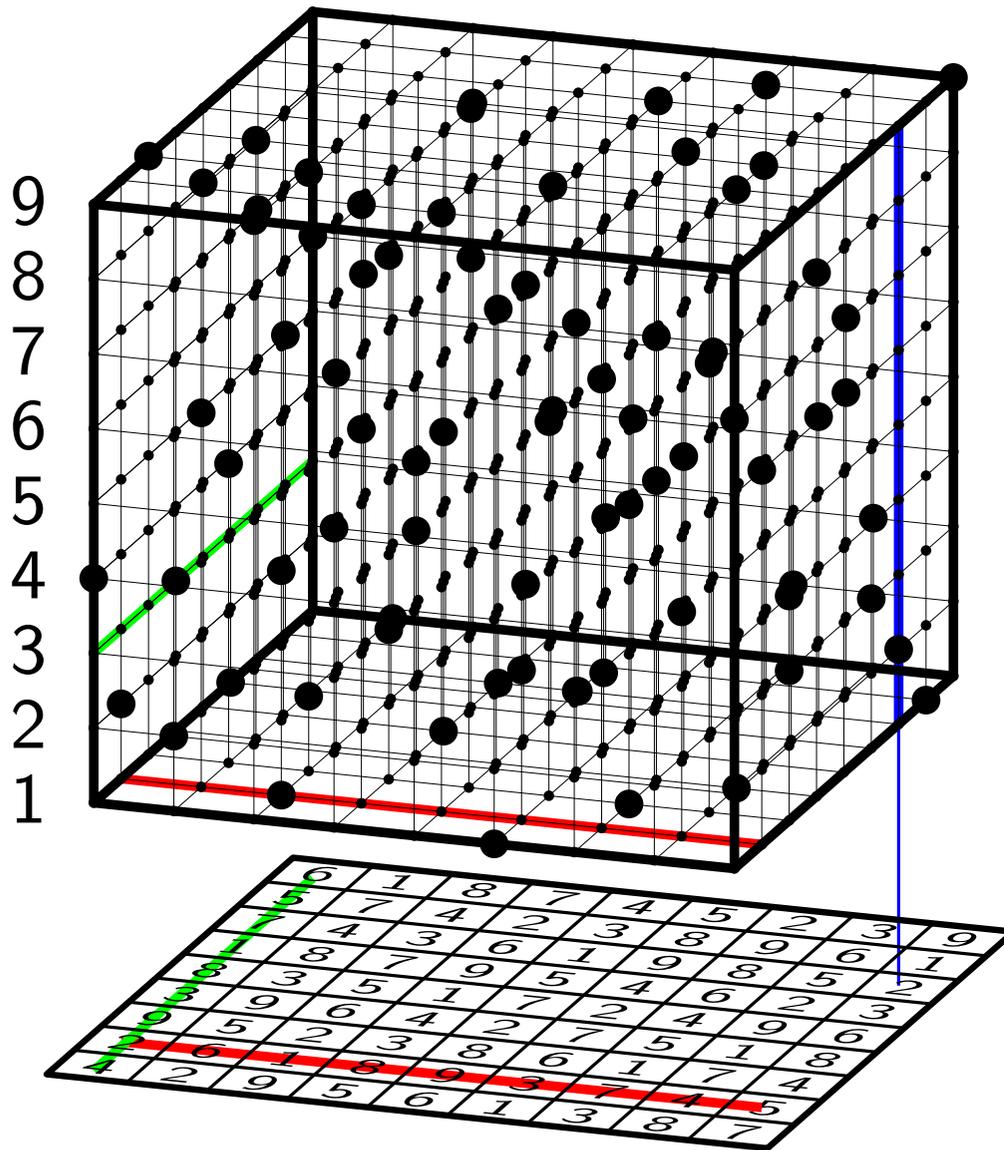
$9 \times 9 \times 9$  Gitterwürfel

- Jedes **Fach** in jeder **Klasse** wird einmal unterrichtet.
- Zu jeder **Stunde** hat jede **Klasse** Unterricht.
- Jedes **Fach** wird zu jeder **Stunde** in irgendeiner Klasse unterrichtet.



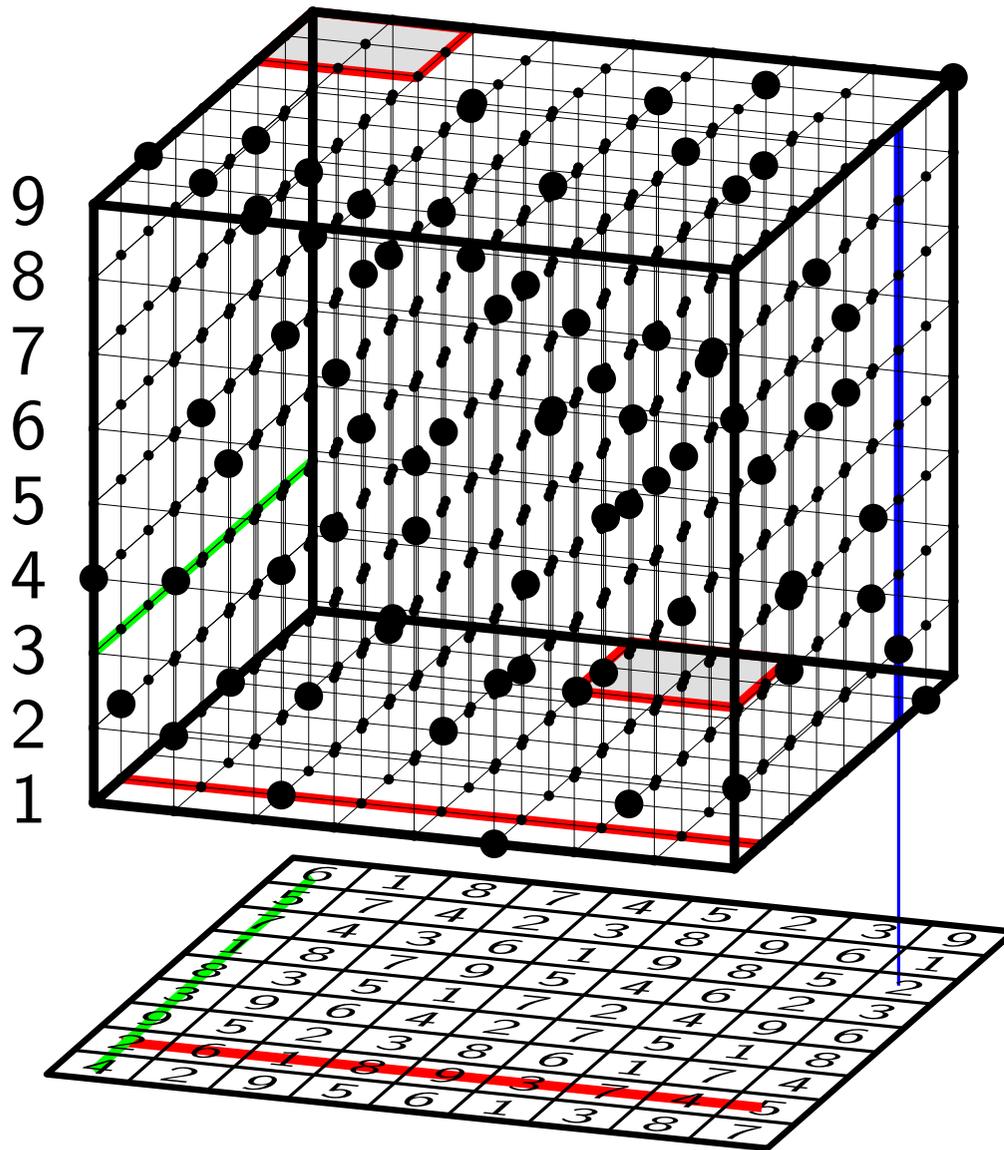
$9 \times 9 \times 9$  Gitterwürfel

- Jedes **Fach** in jeder **Klasse** wird einmal unterrichtet.
- Zu jeder **Stunde** hat jede **Klasse** Unterricht.
- Jedes **Fach** wird zu jeder **Stunde** in irgendeiner Klasse unterrichtet.
- Varianten
- weitere Nebenbedingungen



$9 \times 9 \times 9$  Gitterwürfel

- Jede horizontale **Zeile**,
- jede horizontale **Spalte**, und
- jede senkrechte **Säule**  
enthält genau einen Knoten.



$9 \times 9 \times 9$  Gitterwürfel

- Jede horizontale **Zeile**,
- jede horizontale **Spalte**, und
- jede senkrechte **Säule**  
enthält genau einen Knoten.
- Auch jede waagrechte  **$3 \times 3$ -Scheibe**  
enthält genau einen Knoten.

# Lösung mit Variablen

$x_{ijk} = 1$ , wenn Ziffer  $k$  in Zeile  $i$ , Spalte  $j$  steht

$x_{ijk} = 0$ , sonst.

$(i = 1, \dots, 9; j = 1, \dots, 9; k = 1, \dots, 9)$

$x_{ijk} = 1$ , wenn Ziffer  $k$  in Zeile  $i$ , Spalte  $j$  steht

$x_{ijk} = 0$ , sonst.

$(i = 1, \dots, 9; j = 1, \dots, 9; k = 1, \dots, 9)$

In jeder Zelle steht *eine* Ziffer:

$$\sum_{k=1}^9 x_{ijk} = 1, \text{ für alle } i, j \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^9 x_{ijk} = 1, \text{ für alle } i, j \quad (1)$$

In jeder Zeile  $i$  kommt jede Ziffer  $k$  *einmal* vor:

$$\sum_{j=1}^9 x_{ijk} = 1, \text{ für alle } i, k \quad (2)$$

In jeder Spalte  $j$  kommt jede Ziffer  $k$  *einmal* vor:

$$\sum_{i=1}^9 x_{ijk} = 1, \text{ für alle } j, k \quad (3)$$

Im ersten  $3 \times 3$ -Block kommt jede Ziffer  $k$  *einmal* vor:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{ijk} = 1, \text{ für alle } k, \quad (4.1)$$

und analog in allen anderen  $3 \times 3$ -Blöcken.

$$\sum_{k=1}^9 x_{ijk} = 1, \text{ für alle } i, j \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^9 x_{ijk} = 1, \text{ für alle } i, k \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^9 x_{ijk} = 1, \text{ für alle } j, k \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{3a+i, 3b+j, k} = 1 \quad (4)$$

für  $a, b = 0, 1, 2; k = 0, \dots, 9$

# Lösung mit Variablen

$9 \times 9 \times 9 = 729$  Variablen  $x_{ijk}$

$4 \times (9 \times 9) = 324$  Gleichungen

# Lösung mit Variablen

$9 \times 9 \times 9 = 729$  Variablen  $x_{ijk}$

$4 \times (9 \times 9) = 324$  Gleichungen

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}$$

ersetzen durch

$$0 \leq x_{ijk} \leq 1$$

→ System von linearen Gleichungen und Ungleichungen (lineares Optimierungsproblem)

# Lösung mit Variablen

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 6 |   | 7 |   | 1 | 4 | 3 | 9 |
| 3 |   |   |   |   | 8 | 5 | 1 | 7 |
|   |   | 1 |   |   |   | 8 | 2 | 6 |
| 6 |   | 8 | 3 | 1 |   |   |   | 2 |
|   | 3 |   | 2 |   | 6 |   | 8 | 1 |
| 1 |   |   | 8 | 7 | 9 | 3 | 6 |   |
|   | 8 | 3 |   |   | 2 | 1 | 7 |   |
| 2 |   | 7 | 1 |   |   | 6 |   | 8 |
| 5 | 1 | 6 | 4 | 8 | 7 | 2 | 9 | 3 |

# Lösung mit Variablen

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 8   | 6   | 2/5 | 7   | 2/5 | 1   | 4   | 3   | 9   |
| 3   | 2/4 | 4/9 | 9/6 | 6/2 | 8   | 5   | 1   | 7   |
| 9/7 | 7/5 | 1   | 5/9 | 3/4 | 4/3 | 8   | 2   | 6   |
| 6   | 9/7 | 8   | 3   | 1   | 5/4 | 7/9 | 5/4 | 2   |
| 7/4 | 3   | 5/9 | 2   | 4/5 | 6   | 9/7 | 8   | 1   |
| 1   | 5/2 | 2/4 | 8   | 7   | 9   | 3   | 6   | 4/5 |
| 4/9 | 8   | 3   | 5/6 | 9/6 | 2   | 1   | 7   | 5/4 |
| 2   | 9/4 | 7   | 1   | 3/9 | 5/3 | 6   | 4/5 | 8   |
| 5   | 1   | 6   | 4   | 8   | 7   | 2   | 9   | 3   |

$$x_{ijk} = 1/2$$

# Lösung mit Variablen

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 2 | 5 | 7 | 2 | 5 | 1 | 4 | 3 | 9 |   |   |
| 3 | 2 | 4 | 9 | 9 | 6 | 6 | 2 | 8 | 5 | 1 | 7 |   |
| 9 | 7 | 5 | 1 | 5 | 9 | 3 | 4 | 4 | 3 | 8 | 2 | 6 |
| 6 | 9 | 7 | 8 | 3 | 1 | 5 | 4 | 7 | 9 | 5 | 4 | 2 |
| 7 | 4 | 3 | 5 | 9 | 2 | 4 | 5 | 6 | 9 | 7 | 8 | 1 |
| 1 | 5 | 2 | 2 | 4 | 8 | 7 | 9 | 3 | 6 | 4 | 5 |   |
| 4 | 9 | 8 | 3 | 5 | 6 | 9 | 6 | 2 | 1 | 7 | 5 | 4 |
| 2 | 9 | 4 | 7 | 1 | 3 | 9 | 5 | 3 | 6 | 4 | 5 | 8 |
| 5 | 1 | 6 | 4 | 8 | 7 | 2 | 9 | 3 |   |   |   |   |

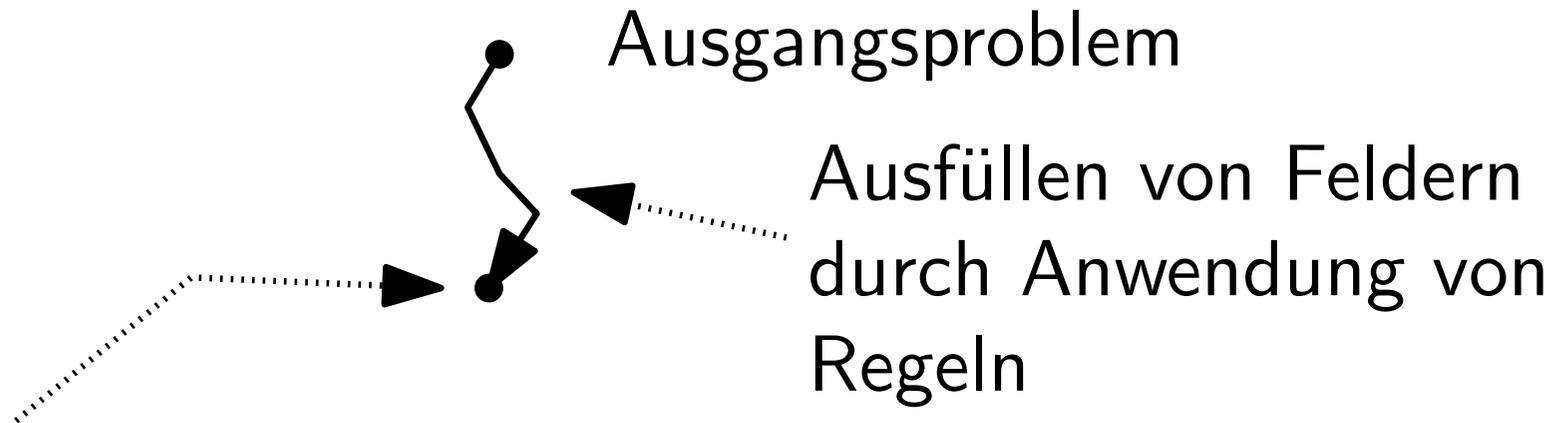
$$x_{ijk} = 1/2$$

Ein *gutes* Sudoku soll durch direktes logisches Schließen, ohne Versuch und Irrtum, lösbar sein.

Das Programm stammt hauptsächlich von David Eppstein (University of California at Irvine).

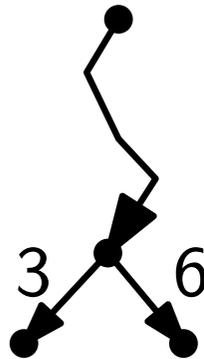
Systematisches Durchsuchen des Lösungsbaumes,  
*backtracking*, Verzweigen

Systematisches Durchsuchen des Lösungsbaumes,  
*backtracking*, Verzweigen

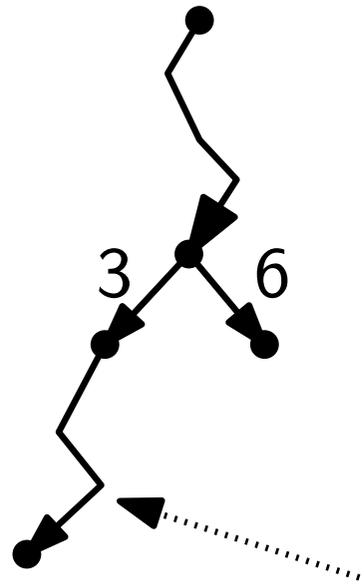


An dieser Stelle kommt man durch Regeln nicht weiter.  
Nehmen wir an, für die Zelle links oben gibt es zwei mögliche Ziffern: 3 und 6

Systematisches Durchsuchen des Lösungsbaumes,  
*backtracking*, Verzweigen

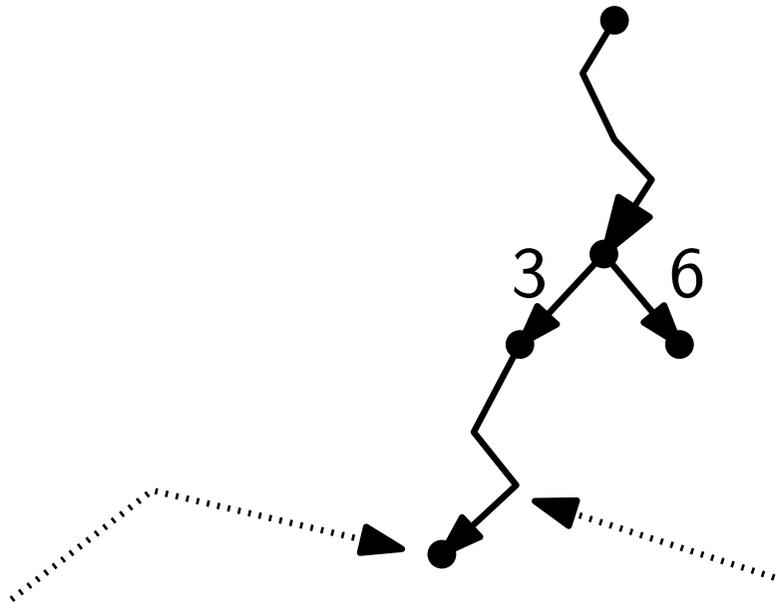


Systematisches Durchsuchen des Lösungsbaumes,  
*backtracking*, Verzweigen



Ausfüllen von Feldern  
durch weitere Anwendung  
von Regeln

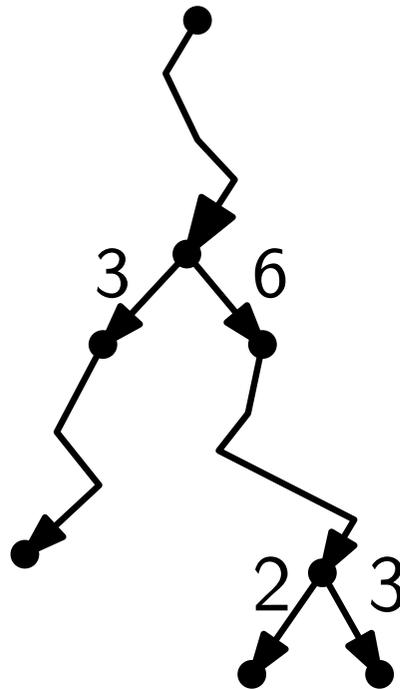
Systematisches Durchsuchen des Lösungsbaumes,  
*backtracking*, Verzweigen



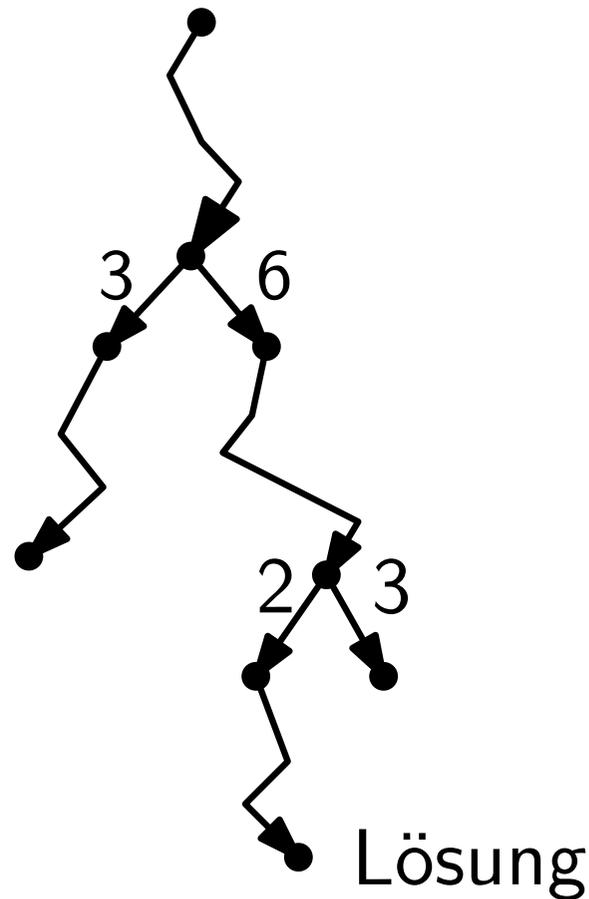
Sackgasse:  
An dieser Stelle geht es  
nicht mehr weiter.

Ausfüllen von Feldern  
durch weitere Anwendung  
von Regeln

Systematisches Durchsuchen des Lösungsbaumes,  
*backtracking*, Verzweigen



Systematisches Durchsuchen des Lösungsbaumes,  
*backtracking*, Verzweigen



# Die Anzahl der Sudokus

Die Anzahl der verschiedenen Sudoku-Gitter ist

$$6670903752021072936960 \approx 6,671 \times 10^{21}$$

(6,671 Trilliarden).

Diese Zahl ist  $9! \times 72^2 \times 2^7 \times 27\,704\,267\,971$ .

(berechnet im Jahr 2005 von Bertram Felgenhauer (Dresden), Frazer Jarvis (Sheffield) und Ed Russell)

# Die Anzahl der Sudokus

Die Anzahl der verschiedenen Sudoku-Gitter ist

$$6670903752021072936960 \approx 6,671 \times 10^{21}$$

(6,671 Trilliarden).

Diese Zahl ist  $9! \times 72^2 \times 2^7 \times 27\,704\,267\,971$ .

(berechnet im Jahr 2005 von Bertram Felgenhauer (Dresden), Frazer Jarvis (Sheffield) und Ed Russell)

Zum Vergleich:

Die Anzahl der  $9 \times 9$  lateinischen Quadrate ist

$$5524751496156892842531225600 \approx 5,525 \times 10^{27}.$$

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 9 | 8 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | 8 | 9 | 6 | 7 |
| 7 | 2 | 3 | 6 | 1 | 9 | 8 | 5 | 4 |
| 1 | 3 | 7 | 9 | 5 | 4 | 6 | 2 | 8 |
| 8 | 6 | 5 | 1 | 7 | 2 | 4 | 9 | 3 |
| 9 | 4 | 2 | 3 | 8 | 6 | 1 | 7 | 5 |
| 3 | 8 | 6 | 4 | 2 | 7 | 5 | 1 | 9 |
| 2 | 5 | 1 | 8 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 |
| 4 | 7 | 9 | 5 | 6 | 1 | 3 | 8 | 2 |

## Umbenennung

1  $\leftrightarrow$  A

2  $\leftrightarrow$  B

3  $\leftrightarrow$  C

4  $\leftrightarrow$  D

⋮  $\leftrightarrow$  ⋮

# Symmetrien

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 9 | 8 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | 8 | 9 | 6 | 7 |
| 7 | 2 | 3 | 6 | 1 | 9 | 8 | 5 | 4 |
| 1 | 3 | 7 | 9 | 5 | 4 | 6 | 2 | 8 |
| 8 | 6 | 5 | 1 | 7 | 2 | 4 | 9 | 3 |
| 9 | 4 | 2 | 3 | 8 | 6 | 1 | 7 | 5 |
| 3 | 8 | 6 | 4 | 2 | 7 | 5 | 1 | 9 |
| 2 | 5 | 1 | 8 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 |
| 4 | 7 | 9 | 5 | 6 | 1 | 3 | 8 | 2 |

## Umbenennung

1  $\leftrightarrow$  A  $\leftrightarrow$  ♥  
2  $\leftrightarrow$  B  $\leftrightarrow$  ♣  
3  $\leftrightarrow$  C  $\leftrightarrow$  ○  
4  $\leftrightarrow$  D  $\leftrightarrow$  ◇  
:  
:  $\leftrightarrow$  :  $\leftrightarrow$  :

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 9 | 8 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | 8 | 9 | 6 | 7 |
| 7 | 2 | 3 | 6 | 1 | 9 | 8 | 5 | 4 |
| 1 | 3 | 7 | 9 | 5 | 4 | 6 | 2 | 8 |
| 8 | 6 | 5 | 1 | 7 | 2 | 4 | 9 | 3 |
| 9 | 4 | 2 | 3 | 8 | 6 | 1 | 7 | 5 |
| 3 | 8 | 6 | 4 | 2 | 7 | 5 | 1 | 9 |
| 2 | 5 | 1 | 8 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 |
| 4 | 7 | 9 | 5 | 6 | 1 | 3 | 8 | 2 |

## Umbenennung

1  $\leftrightarrow$  A  $\leftrightarrow$  ♥  $\leftrightarrow$  ■  
2  $\leftrightarrow$  B  $\leftrightarrow$  ♣  $\leftrightarrow$  ■  
3  $\leftrightarrow$  C  $\leftrightarrow$  ○  $\leftrightarrow$  ■  
4  $\leftrightarrow$  D  $\leftrightarrow$  ◇  $\leftrightarrow$  ■  
:  
: $\leftrightarrow$  :  $\leftrightarrow$  :  $\leftrightarrow$  :

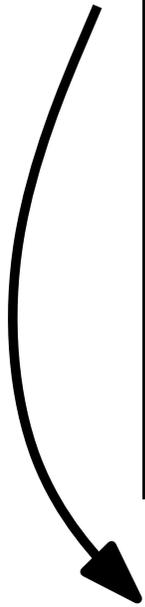
# Symmetrien

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 9 | 8 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | 8 | 9 | 6 | 7 |
| 7 | 2 | 3 | 6 | 1 | 9 | 8 | 5 | 4 |
| 1 | 3 | 7 | 9 | 5 | 4 | 6 | 2 | 8 |
| 8 | 6 | 5 | 1 | 7 | 2 | 4 | 9 | 3 |
| 9 | 4 | 2 | 3 | 8 | 6 | 1 | 7 | 5 |
| 3 | 8 | 6 | 4 | 2 | 7 | 5 | 1 | 9 |
| 2 | 5 | 1 | 8 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 |
| 4 | 7 | 9 | 5 | 6 | 1 | 3 | 8 | 2 |

## Umbenennung

1 ↔ A ↔ ♥ ↔ ■ ↔ 5  
2 ↔ B ↔ ♣ ↔ ■ ↔ 8  
3 ↔ C ↔ ○ ↔ ■ ↔ 9  
4 ↔ D ↔ ◇ ↔ ■ ↔ 6  
: ↔ : ↔ : ↔ : ↔ :  
: ↔ : ↔ : ↔ : ↔ :

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 9 | 8 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | 8 | 9 | 6 | 7 |
| 7 | 2 | 3 | 6 | 1 | 9 | 8 | 5 | 4 |
| 1 | 3 | 7 | 9 | 5 | 4 | 6 | 2 | 8 |
| 8 | 6 | 5 | 1 | 7 | 2 | 4 | 9 | 3 |
| 9 | 4 | 2 | 3 | 8 | 6 | 1 | 7 | 5 |
| 3 | 8 | 6 | 4 | 2 | 7 | 5 | 1 | 9 |
| 2 | 5 | 1 | 8 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 |
| 4 | 7 | 9 | 5 | 6 | 1 | 3 | 8 | 2 |



|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

## Umbenennung

- 1 ↔ A ↔ ♥ ↔ ■ ↔ 5  
 2 ↔ B ↔ ♣ ↔ ■ ↔ 8  
 3 ↔ C ↔ ○ ↔ ■ ↔ 9  
 4 ↔ D ↔ ◇ ↔ ■ ↔ 6  
 : ↔ : ↔ : ↔ : ↔ :  
 : ↔ : ↔ : ↔ : ↔ :

Durch Umbenennung kann man das erste Kästchen in sortierte Reihenfolge bringen.

Ersparnisfaktor:

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 9! = 362\,880$$

# Symmetrien

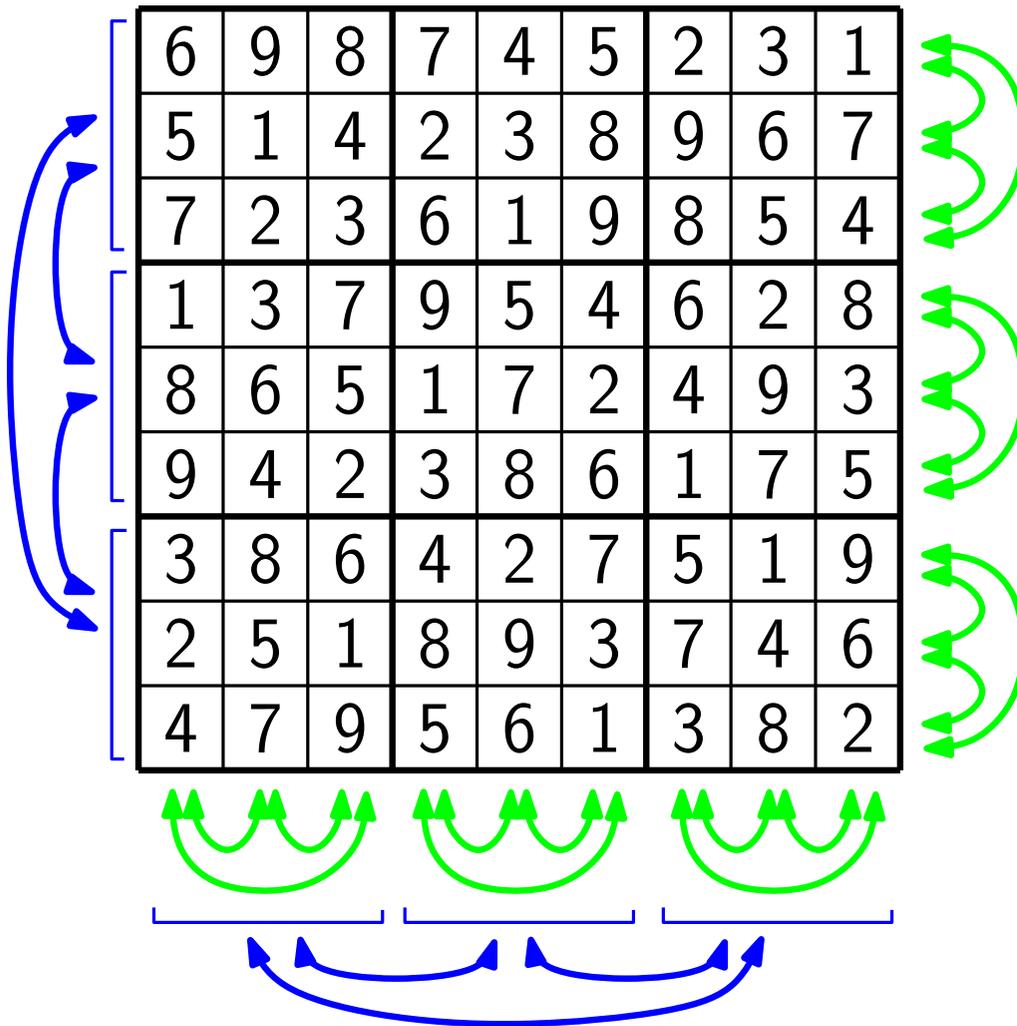
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 9 | 8 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
| 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | 8 | 9 | 6 | 7 |
| 7 | 2 | 3 | 6 | 1 | 9 | 8 | 5 | 4 |
| 1 | 3 | 7 | 9 | 5 | 4 | 6 | 2 | 8 |
| 8 | 6 | 5 | 1 | 7 | 2 | 4 | 9 | 3 |
| 9 | 4 | 2 | 3 | 8 | 6 | 1 | 7 | 5 |
| 3 | 8 | 6 | 4 | 2 | 7 | 5 | 1 | 9 |
| 2 | 5 | 1 | 8 | 9 | 3 | 7 | 4 | 6 |
| 4 | 7 | 9 | 5 | 6 | 1 | 3 | 8 | 2 |



The diagram shows a 9x9 grid with numbers. Green arrows on the right side indicate row swaps within three 3x3 blocks: the first block (rows 1-3), the second block (rows 4-6), and the third block (rows 7-9). Each block has two arrows pointing from the top row to the middle row and from the middle row to the bottom row. Green arrows at the bottom indicate column swaps within three 3x3 blocks: the first block (columns 1-3), the second block (columns 4-6), and the third block (columns 7-9). Each block has two arrows pointing from the left column to the middle column and from the middle column to the right column.

Vertauschung von Zeilen  
oder Spalten innerhalb  
eines Dreierblockes

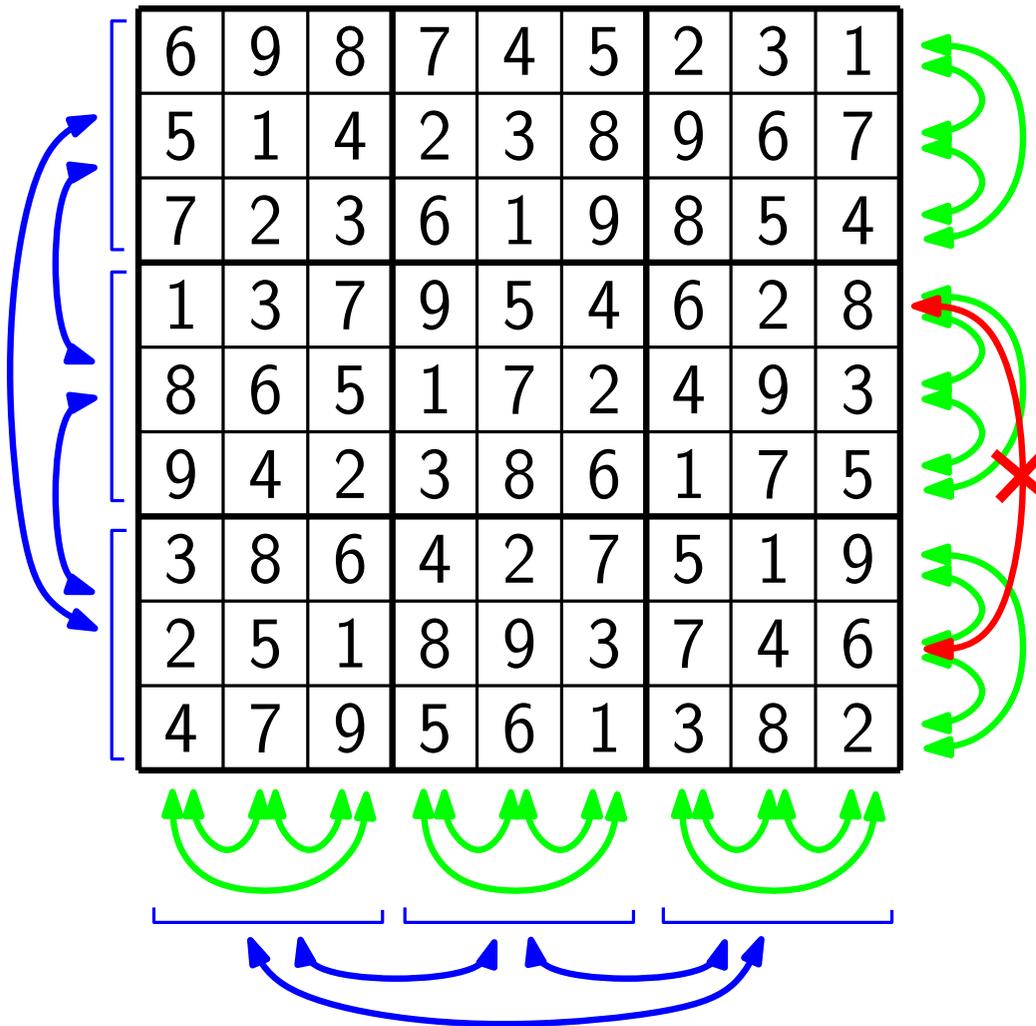
# Symmetrien



Vertauschung von Zeilen oder Spalten innerhalb eines Dreierblockes

Vertauschung von ganzen Dreierblöcken von Zeilen oder Spalten

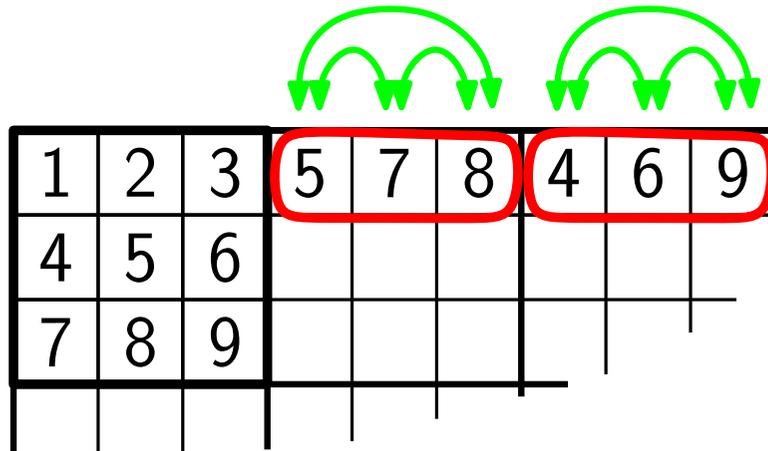
# Symmetrien



Vertauschung von Zeilen oder Spalten innerhalb eines Dreierblockes

Vertauschung von ganzen Dreierblöcken von Zeilen oder Spalten

(Beliebige Zeilen oder Spalten dürfen nicht vertauscht werden!)



|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 4 | 6 | 9 |
| 4 | 5 | 6 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 8 | 9 |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |

Durch Vertauschen von Spalten erreicht man, dass die beiden Dreiergruppen in der ersten Zeile sortiert sind.



|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 4 | 6 | 9 |
| 4 | 5 | 6 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 8 | 9 |   |   |   |   |   |   |

Durch Vertauschen von Spalten erreicht man, dass die beiden Dreiergruppen in der ersten Zeile sortiert sind.



|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 5 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 8 | 9 |   |   |   |   |   |   |

Durch Vertauschen von Dreierblöcken (falls nötig) bringt man dann die kleinste Ziffer (4) ganz nach links.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 4 | 6 | 9 |
| 4 | 5 | 6 |   |   |   |   |   |   |
| 7 | 8 | 9 |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |

- 456 789
- 457 689
- 458 679
- 459 678
- 467 589
- 468 579
- 469 578
- 478 569
- 479 568
- 489 567

Es gibt nur mehr 10 Möglichkeiten für die erste Zeile.

Reduktion von  
 $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$   
auf 10 Möglichkeiten.  
Ersparnisfaktor 72

# Die Anzahl der Sudokus

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 5 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 2 | 3 | 9 | 1 |
| 7 | 8 | 9 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |

Es gibt 36.288  
Möglichkeiten, die ersten  
drei Reihen zu füllen.

# Die Anzahl der Sudokus

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 5 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 2 | 3 | 9 | 1 |
| 7 | 8 | 9 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |

Es gibt 36.288  
Möglichkeiten, die ersten  
drei Reihen zu füllen.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 5 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 | 3 | 9 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 5 | 3 | 2 | 6 | 4 | 1 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |

Viele von diesen  
Möglichkeiten können auf  
genau die gleiche Art  
vervollständigt werden.

# Die Anzahl der Sudokus

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 5 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 2 | 3 | 9 | 1 |
| 7 | 8 | 9 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |

Es gibt 36.288  
Möglichkeiten, die ersten  
drei Reihen zu füllen.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 5 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 | 3 | 9 | 2 |
| 7 | 8 | 9 | 5 | 3 | 2 | 6 | 4 | 1 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |

Viele von diesen  
Möglichkeiten können auf  
genau die gleiche Art  
vervollständigt werden.

Die 32.666 Möglichkeiten lassen sich zu nur  
71 Klassen zusammenfassen. (eigentlich 44)

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 5 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 2 | 3 | 9 | 1 |
| 7 | 8 | 9 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |

← einer von 71 Fällen

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 5 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 2 | 3 | 9 | 1 |
| 7 | 8 | 9 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |

← einer von 71 Fällen



↖ Für diese 6 Felder braucht man ebenfalls nur 10 Möglichkeiten zu betrachten.

|     |     |
|-----|-----|
| 235 | 689 |
| 236 | 589 |
| 238 | 579 |
| 239 | 568 |
| 256 | 389 |
| 258 | 369 |
| 259 | 378 |
| 268 | 359 |
| 269 | 358 |
| 289 | 356 |

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 5 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 2 | 3 | 9 | 1 |
| 7 | 8 | 9 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 5 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 8 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 9 |   |   |   |   |   |   |   |   |

← einer von 71 Fällen

← Diesen Bereich kann man mit Probieren abzählen.

↑  
einer von 10 Fällen

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 5 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 2 | 3 | 9 | 1 |
| 7 | 8 | 9 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 5 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 6 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 8 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 9 |   |   |   |   |   |   |   |   |

← einer von 71 Fällen

← Diesen Bereich kann man mit Probieren abzählen.

↑  
einer von 10 Fällen

Insgesamt werden  
 ~7 000 000 000 Lösungen  
 abgegrast (mit  
 ~130 000 000 000  
 Sackgassen)

Laufzeit: einige Stunden

Es gibt neuere Methoden, die die Anzahl der Sudokugitter in Bruchteilen einer Sekunde berechnen.

Es gibt neuere Methoden, die die Anzahl der Sudoku-Gitter in Bruchteilen einer Sekunde berechnen.

Unter Berücksichtigung von allen Symmetrien gibt es 5.472.730.538 *verschiedene* Sudoku-Gitter.