

Eine Lösung zu Aufgabe 27 mit Intervalllänge $< 8n^2$.

Es sei p eine Primzahl. Für $0 < a, b < p$ betrachten wir die Folge $u_1 = 1$, $v_1 = 0$, und

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i+1} = au_i + v_i \pmod{p} \\ v_{i+1} = bu_i \pmod{p} \end{array} \right\}, \text{ für } i = 1, 2, \dots, p^2 - 2.$$

Die Werte a und b müssen so gewählt werden, dass alle (u_i, v_i) für $i = 1, 2, \dots, p^2 - 2$ von $(0, 1)$ verschieden sind. (Eine solche Wahl ist immer möglich.) Insbesondere sind dann alle Vektoren (u_i, v_i) verschieden. Der Vektor (u_{p^2-1}, v_{p^2-1}) ist auf jeden Fall gleich $(0, 1)$.

Dann ist $T = \{i \mid 1 \leq i < p^2 - 1, u_i = 1\}$ eine Menge mit p Elementen, deren $p(p-1)/2$ paarweise Summen $t_i + t_j$ verschieden sind. (Sie sind sogar modulo $p^2 - 1$ verschieden, und überdies sind sie auch von den p Werten $2t_i$ verschieden, die man als paarweise Summen zweier "gleicher" Elemente interpretieren kann.)

Man kann eine Menge T mit diesen Eigenschaften auch für jede Primzahlpotenz p konstruieren (insbesondere für alle Zweierpotenzen); allerdings ist das Verfahren etwas komplizierter.