24. (2 Punkte) Beweisen Sie: Wenn x eine Ecke des Polyeders $\{ x \mid Ax \leq b \}$ ist, dann gibt es eine Zielfunktion c, sodass x die eindeutige Optimallösung des Problems $\{ c^T x \mid Ax \leq b \}$ ist.

25. (7 Punkte) Die Adjazenzmatrix A eines gerichteten Graphen $G = (V, E)$ hat eine Zeile für jeden Knoten und eine Spalte für jede Kante. In der Spalte, die zur Kante $e = (i, j)$ gehört, steht -1 in Zeile i und 1 in Spalte j. Alle übrigen Elemente sind 0.

    Beweisen Sie folgende Aussagen.

    (a) Die Zeilen von A sind linear abhängig.

    (b) Wenn G ein Kreis ist (ohne Berücksichtigung der Kantenorientierungen), dann ist $\det A = 0$

    (c) Für $F \subseteq E$ sei A_F die Matrix, die aus den zu F gehörenden Spalten besteht. Für einen fest gewählten Knoten $v_0 \in V$ sei $\bar{A}_F$ die Matrix, die aus A_F entsteht, indem man die Zeile, die zu v_0 gehört, streicht.

    F sei eine Menge von $n-1$ Kanten, und $v \neq v_0$ sei ein Knoten vom Grad 1 in F. Wie kann man die Berechnung von $\det A_F$ auf eine Determinante einer ähnlichen Matrix der Dimension $n-2$ zurückführen?

    (d) Für eine Menge F von $n-1$ Kanten ist $\det A_F = \pm 1$, falls F ein Baum ist, und $\det A_F = 0$, sonst.

26. (0 Punkte) Betrachten Sie die Formulierung des kürzesten-Wege-Algorithmus als lineares Programm. Zeigen Sie das für jede zulässige (u_i) Lösung des dualen Programmes $u_j - u_i$ höchstens gleich der Länge des kürzesten Weges von i nach j ist.

27. (5 Punkte) Beweisen Sie, dass im primal-dualen kürzesten-Wege-Algorithmus u_i für $i \in S$ die Länge eines kürzesten Weges von s nach i ist. (S ist die Menge der von s erreichbaren Knoten.)

28. (0 Punkte) Beweisen Sie, dass im primal-dualen kürzesten-Wege-Algorithmus mit Startlösung $u \equiv 0$ alle Werte u_i für $i \notin S$ gleich sind.

29. (0 Punkte) Betrachten Sie die Formulierung des kürzesten-Wege-Algorithmus als lineares Programm, wobei auch negative Kantenlängen zugelassen sind. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind

    (a) Es gibt einen kürzesten Weg von s nach t, auch wenn Knotenwiederholungen zugelassen sind.

    (b) Das duale lineare Programm ist zulässig.

    (c) Es gibt keinen Kreis mit negativer Gesamtlänge.

    (Für gewisse Äquivalenzen muss man zusätzliche Annahmen machen.)

30. (0 Punkte) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen (RP) und (DRP) im primal-dualen kürzesten-Wege-Algorithmus entartet sind.

31. (0 Punkte) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen (RP) und (DRP) im primal-dualen größten-Fluss-Algorithmus entartet sind.