13. (a) (2 Punkte) Schreiben Sie das Problem, in einem bipartiten Graphen mit Kantengewichten eine Paarung mit dem größten Gewicht zu finden, als lineares Programm in 0-1-Variablen. (Variante: Es soll eine größte *vollständige* Paarung gefunden werden.)

    (b) (5 Punkte) Ignorieren Sie die Restriktion, dass die Variablen 0 oder 1 sein müssen, und erstellen Sie zum entstehenden linearen Programm das duale lineare Programm.

14. (7 Punkte.) Ist der Punkt $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{5}{12}, 0, 0)$ eine Optimallösung für das folgende lineare Programm?

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \\ \text{unter} \quad & x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_5 \leq 3 \\ & x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

    Nehmen Sie zur Beantwortung der Frage den Satz vom komplementären Schlupf zu Hilfe. (Wenn die Lösung nicht optimal ist, versuchen Sie, eine bessere Lösung zu finden.)

15. (0 Punkte) Dualität für lineare Programme mit Gleichungen und unbeschränkten Variablen. Bringen Sie ein lineares Programm von der Art, wie es im folgenden angegeben ist, in Standardform. Bestimmen Sie das duale Programm und vereinfachen Sie es.

    (a) ein lineares Programm, das in Standardform ist, außer dass die Variable x_1 unbeschränkt ist.

    (b) ein lineares Programm in Standardform mit einer zusätzlichen Gleichung als Restriktion.

    Stellen Sie Regeln zur Bestimmung des dualen Programmes für lineare Programme mit Gleichungen und unbeschränkten Variablen auf.

16. (0 Punkte). Beweisen Sie: Das primale lineare Programm

$$\max \{ c^{\mathrm{T}} x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0 \}$$

    hat genau dann für jeden Vektor b eine Optimallösung, wenn das duale lineare Programm

$$\min \{ b^{\mathrm{T}} y \mid A^{\mathrm{T}} y \geq c,\ y \geq 0 \}$$

    mindestens einen zulässigen Punkt y hat, und wenn es eine Schranke K gibt, sodass für jeden zulässigen Punkt y des dualen linearen Programms gilt: $\|y\|_\infty \leq K$.

17. Formulieren Sie folgende Probleme als lineare Programme:

    (a) (0 Punkte) Für zwei endliche Mengen von Punkten in der Ebene soll eine Gerade bestimmt werden, die die beiden Mengen trennt.

    (b) (5 Punkte) Für eine gegebene endliche Menge von Punkten in der Ebene soll ein Kreisring mit kleinster Fläche berechnet werden, der die Menge enthält.

    Wie viele Variablen und wie viele Restriktionen hat Ihr lineares Programm jeweils?

18. (6 Punkte) Beweisen Sie das *Lemma von Farkas* mit Hilfe des Dualitätssatzes der linearen Optimierung:

    A sei eine reelle $(m \times n)$-Matrix und b ein n-Vektor. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

    (a) Aus $Ax \leq 0$ folgt $b^{\mathrm{T}} x \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

    (b) Es gibt ein $y \geq 0$ mit $b^{\mathrm{T}} = y^{\mathrm{T}} A$.