Kombinatorische Optimierung, SS 2002 — 1. Übungsblatt

1. (0 Punkte) Untermonoide.
   Zu einem Unabhängigkeitssystem $(E, \mathcal{S})$ wird das durch eine Teilmenge $A \subseteq E$ induzierte Untersystem $(A, \mathcal{S}_A)$ so definiert:

   $$\mathcal{S}_A := \{ B \in \mathcal{S} \mid B \subseteq A \}$$

   Beweisen Sie, dass ein Untersystem eines Matroides wieder ein Matroid ist.

2. (10 Punkte) Modulare Funktionen.
   Eine Mengenfunktion $f: 2^E \to \mathbb{R}$ heißt *modular*, wenn für alle $A, B \subseteq E$ gilt:

   $$f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B)$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f(A) = |A|$ und $f(A) = |A| - 1$ modular sind.

   (b) Zeigen Sie, dass jede modulare Funktion von der Form

   $$f(A) = \bar{c} + \sum_{i \in A} c_i$$

   für geeignete Konstanten $\bar{c}$ und c_i ist.
   Hinweis: Untersuchen Sie zuerst die kleinen Mengen.

3. (6 Punkte) Welche der folgenden Mengensysteme sind die Basen eines Matroids?

   (a) $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$

   (b) $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$

   (c) $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$

4. (0 Punkte) Betrachten Sie folgendes Unabhängigkeitssystem. Gegeben ist ein regelmäßiges Fünfeck. Die Grundmenge E ist die Menge der 10 Strecken zwischen je zwei Ecken des Fünfecks. Eine Menge $A \subseteq E$ ist unabhängig, wenn sich keine zwei Strecken aus A kreuzen.

   (a) Zeigen Sie, dass es sich um ein Unabhängigkeitssystem handelt.

   (b) Haben alle Basen dieselbe Größe?

   (c) Liegt ein Matroid vor?

5. Zeigen Sie, dass folgende Mengensysteme Matroide sind:

   (a) Ein *graphisches Matroid* besteht aus allen kreisfreien Kantenmengen eines Graphen.

   (b) (5 Punkte) Ein *Paarungsmatroid* besteht aus allen Knotenmengen eines Graphen, die von einer Paarung überdeckt werden können.

   (c) (5 Punkte) Ein *Partitionsmatroid* für eine Partition $\{K_1, K_2, \ldots, K_r\}$ einer Grundmenge E in disjunkte Mengen besteht aus allen Teilmengen von E, die aus jeder Klasse K_i höchstens ein Element enthalten.

   (d) Ein *kographisches Matroid* eines zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ besteht aus allen Kantenmengen A, für die der Graphen $(V, E - A)$ zusammenhängend ist.

   Zusatzfrage: Bestimmen Sie die *Kreise* (die minimalen abhängigen Kantenmengen) der Matroide in (a) und (c).