Graphzerlegung

Robert Günzler   16.Juli 2002

1 Ziel des Vortrags

Beweis des folgenden Theorems:

Theorem 1

Sei G ein nicht separierbarer Graph. Dann besitzt G eine eindeutige minimale Zerlegung, wobei jedes Element ein 3-zusammenhängender Graph, ein Polygon (zusammenhängender Graph, jeder Knoten Grad 2) oder ein Band (zusammenhängender Graph, 2 Knoten, keine Schleifen) ist.

2 Grundlegende Definitionen

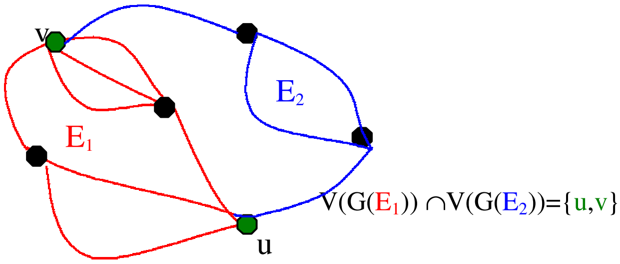
trennbarer Graph

Ein zusammenhängender Graph G = <V, E> heißt *nicht trennbar*, genau dann, wenn für alle Partition $\{E_1,E_2\}$(mit $|E_1|>0<|E_2|$) von E gilt, dass $|V(G(E_1))\cap V(G(E_2))| \geq 2$ ist. Sonst heißt G *trennbar*.

Split

Ein *Split* eines nicht trennbaren Graphen ist eine Partition $\{E_1, E_2\}$ von E, so dass gilt:

- $|E_1| \geq 2 \leq |E_2|$
- $|V(G(E_1)) \cap V(G(E_2))| = 2$



kreuzende Splits

Zwei Splits $\{E_1, E_2\}$, $\{E_3, E_4\}$ kreuzen sich, wenn keine der Mengen $E_1\cap E_3$, $E_1\cap E_4$, $E_2\cap E_3$ und $E_2\cap E_4$ leer ist.

guter Split

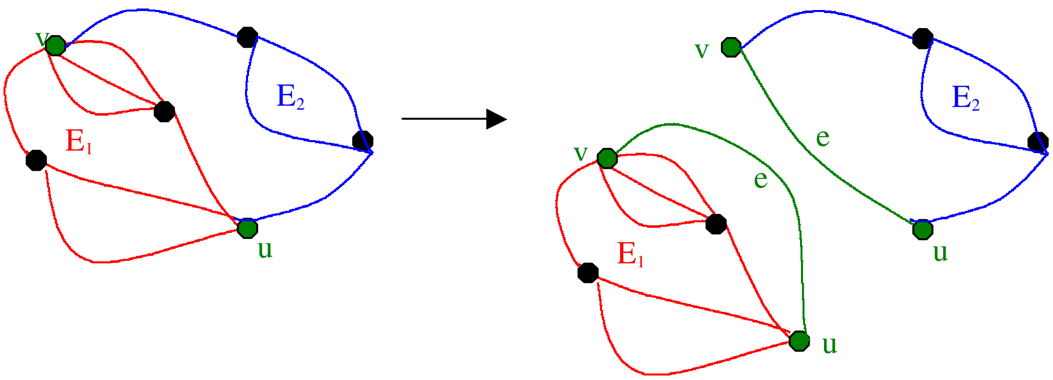
Ein Split $\{E_1, E_2\}$ von G wird *gut* genannt, genau dann, wenn für alle anderen Splits von G gilt, dass $\{E_1, E_2\}$ keinen dieser Splits kreuzt.

kompatible Splitmenge

Eine Menge S von Splits eines Graphen G ist kompatibel, wenn für jeweils zwei Splits dieser Menge gilt, dass sie sich nicht kreuzen.

einfache Zerlegung

Die Partition $\{E_1, E_2\}$ sei ein Split von G. Sei $V(G(E_1)) \cap V(G(E_2)) = \{u, v\}$ und e eine Kante mit $e\notin E$. Wir konstruieren $G_1= G(E_1; e)=<V(E_1), E_1\cup\{e\}>$ und $G_2= G(E_2; e) =<V(E_2), E_2\cup\{e\}>$ mit e=(u, v). Wir schreiben $G\rightarrow\{G_1, G_2\}$, wobei $\{G_1,G_2\}$ dann eine *einfache Zerlegung* von G assoziiert mit dem Split $\{E_1, E_2\}$ und dem *Marker* e ist.



Zerlegung

Eine *Zerlegung* D von G ist wie folgt induktiv definiert:

- {G} ist eine *Zerlegung* (*triviale Zerlegung*) von G
- ist D eine *Zerlegung* von G so kann man aus D eine *Zerlegung* D' erhalten, indem man $G_1 \in D$ durch eine einfache Zerlegung von G_1 ersetzt, wobei dessen Marker e keine Kante eines Elements aus D sein darf

(strikte) Verfeinerung

Eine Zerlegung D' heißt (*strikte*) *Verfeinerung* von D, falls D' aus D durch mindestens eine Ersetzung eines Elements aus D durch dessen einfache Zerlegung hervorgeht.

minimale Zerlegung

Eine Zerlegung D von G wird *minimal* bezüglich einer Eigenschaft P genannt, wenn D diese Eigenschaft besitzt aber jede andere Zerlegung D' von G, wobei D Verfeinerung von D' ist, diese Eigenschaft nicht besitzt.

3 Beweisführung

Lemma 1

Sei $G \rightarrow \{G_1, G_2\}$ eine Zerlegung mit dem Marker e und sei $A \subset E_1$. Dann ist $\{A, E\backslash A\}$ ein Split von G genau dann, wenn $\{A, (E_1\backslash A) \cup \{e\}\}$ ein Split von G_1 ist.

Bedeutung:

Somit ist es möglich, durch gegebene, sich jeweils paarweise nicht kreuzende Splits eines Graphen G, Splits für die Komponenten einer Zerlegung von G zu finden. Dies bedeutet, eine beliebige Zerlegung eines Graphen G lässt sich beschreiben durch eine geordnete und kompatible Menge von Splits von G.

Bsp: kompatible Splitmenge $S=\{\{E_1, E_2\}, \{E_3, E_4\}, \{E_5, E_6\}\}$

$G \xrightarrow{\{E_1, E_2\}} \{G_1, G_2\}$

falls $E_{3/4} \subset E_1$:

$G_1 \xrightarrow{\{E_{3/4}, E_1\backslash E_{3/4} \cup \{e\}\}} \{G_3, G_4\}$

falls $E_{3/4} \subset E_2$:

$G_2 \xrightarrow{\{E_{3/4}, E_2\backslash E_{3/4} \cup \{e\}\}} \{G_5, G_6\}$

Als Beispiel nehmen wir an, dass $E_4 \subset E_1$ ist, wodurch nach Abarbeiten der ersten zwei Splits von S der Graph G zerlegt wurde in $\{G_3, G_4, G_2\}$.

Betrachtung des Splits $\{E_5, E_6\}$:

falls $E_{5/6} \subset E_1$:

$G_1 \xrightarrow{\{E_{5/6}, E_1\backslash E_{5/6} \cup \{e\}\}} \{G_3', G_4'\}$

falls $E_{5/6} \subset E_2$:

$G_2 \xrightarrow{\{E_{5/6}, E_1\backslash E_{5/6} \cup \{e\}\}} \{G_5', G_6'\}$

Als Beispiel nehmen wir an $E_5 \subset E_1$ so sind $\{E_4, E_1\backslash E_4 \cup \{e\}\}$ und $\{E_5, E_1\backslash E_5 \cup \{e\}\}$ Splits von G_1, die sich gegenseitig nicht kreuzen.
Falls $E_5 \subset E_4$ so ist $\{E_5, E_4\backslash E_5 \cup \{f\}\}$ ein Split von G_3.
Falls $E_4 \subset E_5$ so ist $(E_1\backslash E_5 \cup \{e\}) \subset (E_1\backslash E_4 \cup \{e\})$ und $\{E_1\backslash E_5 \cup \{e\}, (E_1\backslash E_4 \cup \{e\})\backslash (E_1\backslash E_5 \cup \{e\}) \cup \{f\})$ ein Split von G_4.

Beweis:

$\{E_1,E_2\}$ ist ein Split von G

$\Rightarrow \quad |E_1| \geq 2 \leq |E_2|$ und $V(G(E_1)) \cap V(G(E_2)) = \{u, v\}$ und $e=(u, v)$

$|E\backslash A| > |(E_1\backslash A) \cup \{e\}| \geq 2$, $|A| \geq 2$

$V(G(A)) \cap V(G(E\backslash A)) = V(G(A)) \cap (V(G(E_2)) \cup V(G(E_1\backslash A)))$
$V(G(A)) \cap V(G((E_1\backslash A) \cup \{e\})) = V(G(A)) \cap (V(G(E_1\backslash A)) \cup V(G(e)))$

1. $k \in V(G(A)) \cap (V(G(E_2)) \cup V(G(E_1\backslash A)))$
   $\Rightarrow k \in V(G(A))$ und ($k \in V(G(E_2))$ oder $k \in V(G(E_1\backslash A))$)
   1. $k \in V(G(E_1\backslash A))$
      $\Rightarrow k \in V(G(A)) \cap (V(G(E_1\backslash A)) \cup V(G(e)))$
   2. $k \in V(G(E_2))$
      $\Rightarrow k=u$ oder $k=v$
      $\Rightarrow k \in V(G(e))$
      $\Rightarrow k \in V(G(A)) \cap (V(G(E_1\backslash A)) \cup V(G(e)))$

2. $k \in V(G(A)) \cap (V(G(E_1\backslash A)) \cup V(G(e)))$
   $\Rightarrow k \in V(G(A))$ und ($k \in V(G(E_1\backslash A))$ oder $k \in V(G(e))$)
   1. $k \in V(G(E_1\backslash A))$
      $\Rightarrow k \in V(G(A)) \cap (V(G(E_2)) \cup V(G(E_1\backslash A)))$
   2. $k \in V(G(e))$
      $\Rightarrow k=u$ oder $k=v$
      $\Rightarrow k \in V(G(E_2))$
      $\Rightarrow k \in V(G(A)) \cap (V(G(E_2)) \cup V(G(E_1\backslash A)))$

$\Rightarrow V(G(A)) \cap V(G(E\backslash A)) = V(G(A)) \cap V(G((E_1\backslash A) \cup \{e\}))$

<u>*Lemma 2*</u>

Sei $\{E_1, E_2\}$ ein Split von G und sei $\{E_3, E_4\}$ ein guter Split von G mit $E_3 \subset E_1$, dann ist $\{E_3, (E_1\backslash E_3) \cup \{e\}\}$ ein guter Split von $G_1 = \langle V(E_1), E_1 \cup \{e\}\rangle$.

<u>Beweis:</u>

- nach *Lemma 1* muss $\{E_3, (E_1\backslash E_3) \cup \{e\}\}$ ein Split von G_1 sein

Annahme: $\{E_3, (E_1\backslash E_3) \cup \{e\}\}$ ist kein guter Split von G_1

$\Rightarrow$ es existiert ein Split $\{A, (E_1\backslash A) \cup \{e\}\}$ von G_1, der den Split $\{E_3, (E_1\backslash E_3) \cup \{e\}\}$ kreuzt
- $A \cap E_3$, $A \cap ((E_1\backslash E_3) \cup \{e\})$, $((E_1\backslash A) \cup \{e\}) \cap E_3$ und $((E_1\backslash A) \cup \{e\}) \cap ((E_1\backslash E_3) \cup \{e\})$ sind nicht leer

$\Rightarrow$ nach *Lemma 1* existiert dann auch der Split $\{A, E\backslash A\}$ von G

$\Rightarrow$
- $A \cap E_3$ ist nicht leer (s. o.)
- $E\backslash A \cap E_3$ ist nicht leer, da $((E_1\backslash A) \cup \{e\}) \cap E_3$ nicht leer ist
  - $A \cap ((E_1\backslash E_3) \cup \{e\}$ ist nicht leer $\Rightarrow A \not\subset E_3$
- $A \cap E_4$ ist nicht leer, da $A \not\subset E_3$
  - $E_3 \subset E_1 \Rightarrow E_4 \not\subset E_1 \Rightarrow E_4 \not\subset A$
- $E\backslash A \cap E_4$ ist nicht leer, da $E_4 \not\subset A$

$\Rightarrow$ der Split $\{A, E\backslash A\}$ kreuzt den Split $\{E_3, E_4\}$

$\Rightarrow \{E_3, E_4\}$ ist kein guter Split von G $\Rightarrow$ Widerspruch

$\Rightarrow \{E_3, (E_1\backslash E_3) \cup \{e\}\}$ ist ein guter Split von G_1

<u>*Lemma 3*</u>

Wenn $\{E_1, E_2\}$ ein guter Split von G und $\{E_3, (E_1\backslash E_3) \cup \{e\}\}$ ein guter Split von $G_1 = \langle V(E_1), E_1 \cup \{e\}\rangle$ ist, dann ist $\{E_3, E\backslash E_3\}$ ein guter Split von G.

Bedeutung:

Zusammen mit *Lemma 2* wird die Aussage von *Lemma 1* für gute Splits erweitert.
Die einzigste Abweichung von *Lemma 1* ist, dass wenn man aus zwei Splits für G auf einen guten Split für eine Komponente der Zerlegung von G schließen will, so muss nur einer der Splits für G gut sein.

Beweis:

- nach *Lemma 1* ist $\{E_3, E \setminus E_3\}$ ein Split von G

Annahme: $\{E_3, E \setminus E_3\}$ ist kein guter Split von G

$\Rightarrow$ es existiert ein Split $\{E_5, E_6\}$ von G, der den Split $\{E_3, E \setminus E_3\}$ kreuzt
- $E_5 \cap E_3$, $E_5 \cap (E \setminus E_3)$, $E_6 \cap E_3$ und $E_6 \cap (E \setminus E_3)$ sind nicht leer

$\Rightarrow$ der Split $\{E_5, E_6\}$ darf den Split $\{E_1, E_2\}$ nicht kreuzen, da $\{E1, E2\}$ sonst kein guter Split wäre

$\Rightarrow$ da $E_3 \subset E_1$ gilt $E_2 \cap E_3$ ist leer, da $E_5 \cap E_3$ und $E_6 \cap E_3$ nicht leer sind, gilt $\{E_1, E_2\} \neq \{E_5, E_6\}$

$\Rightarrow$ $E_5 \supseteq E_1$ oder $E_5 \subset E_1$

1. $E_5 \supseteq E_1$:
   $\Rightarrow$ $E_3 \subset E_5$
   $\Rightarrow$ $E_6 \cap E_3$ ist leer
   $\Rightarrow$ der Split $\{E_5, E_6\}$ kreuzt den Split $\{E_3, E \setminus E_3\}$ nicht
   $\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme
2. $E_5 \subset E_1$:
   $\Rightarrow$ nach *Lemma 1* ist $\{E_5, (E_1 \setminus E_5) \cup \{e\}\}$ dann ein Split von G_1
   $\Rightarrow$
   - $E_5 \cap E_3$ ist nicht leer (s.o.)
     - $E_5 \cap E \setminus E_3$ ist nicht leer $\Rightarrow E_5 \not\subset E_3$
   - $E_5 \cap ((E_1 \setminus E_3)) \cup \{e\})$ ist nicht leer, da $E_3 \subset E_1$, $E_5 \subset E_1$ und $E_5 \not\subset E_3$
     - $E_6 \cap E_3$ ist nicht leer $\Rightarrow E_3 \not\subset E_5$
   - $((E_1 \setminus E_5) \cup \{e\}) \cap E_3$ ist nicht leer, da $E_3 \subset E_1$, $E_5 \subset E_1$ und $E_3 \not\subset E_5$
   - $((E_1 \setminus E_5) \cup \{e\}) \cap ((E_1 \setminus E_3)) \cup \{e\})$ ist nicht leer, da beide die Kante e enthalten

   $\Rightarrow$ der Split $\{E_3, (E_1 \setminus E_3) \cup \{e\}\}$ kreuzt den Split $\{E_5, E_6\}$ kreuzt
   $\Rightarrow$ $\{E_3, (E_1 \setminus E_3) \cup \{e\}\}$ ist kein guter Split von G_1
   $\Rightarrow$ Widerspruch

$\Rightarrow$ $\{E_3, E \setminus E_3\}$ ist ein guter Split von G

Lemma4

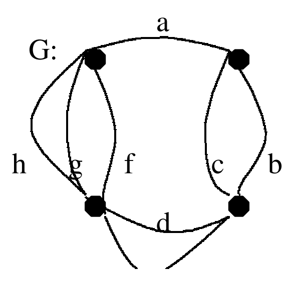
Seien $\{E_1, E_2\}$, $\{E_3, E_4\}$ Splits von $G=<V,E>$, so dass $E_3 \subset E_1$. Sei darüber hinaus $e, f \notin E$ und $e \neq f$, dann

$$G(E_1; e)(E_3; f) = G(E_3; f)$$
$$G(E_1; e)((E_1 \setminus E_3) \cup \{e\}; f) = G(E_4; f)((E_4 \setminus E_2) \cup \{f\}; e)$$

Bedeutung:

Die Aussage dieses *Lemma* ist, dass es bei zwei gegebenen, kreuzungsfreien Splits egal ist ob man G durch den Split 1 zerlegt und mit Hilfe von Split 2 sich einen Split für eine der Komponenten der Zerlegung von G generiert oder ob man mit Split 2 anfängt.

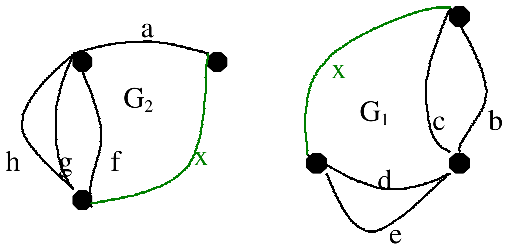
Bsp: G:



nicht kreuzende Splits:

$S_1=\{\{b, c, d, e\}, \{a, f, g, h\}\}$
$S_2=\{\{b, c\}, \{a, f, g, h, d, e\}\}$

<u>Beginnen mit Split S_1:</u>

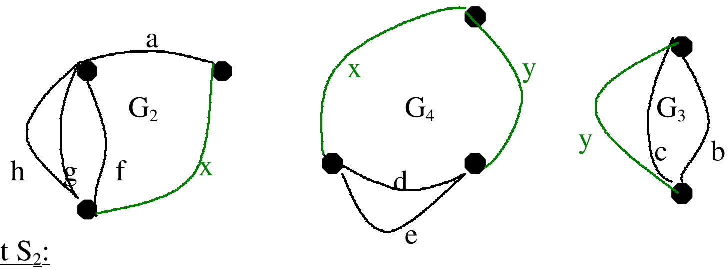


Ermittlung des Splits S_3:

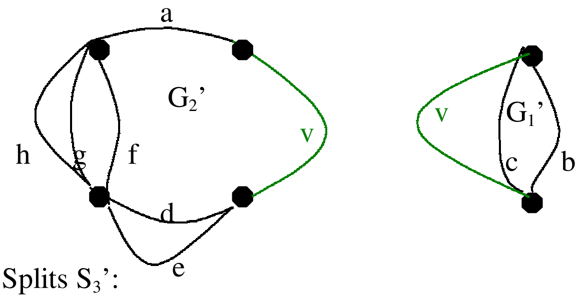
$\{b, c\} \subset \{b, c, d, e\}$

$S_3 = \{\{b, c\}, (\{b, c, d, e\} \setminus \{b, c\}) \cup \{x\}\} = \{\{b, c\}, \{d, e, x\}\}$

S_3 ist Split für den Graphen G_1



<u>Beginnen mit Split S_2:</u>

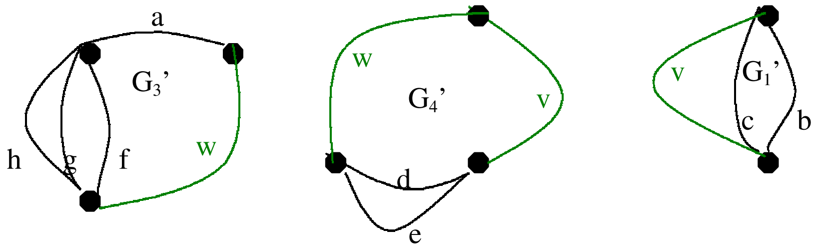


Ermittlung des Splits S_3':

$\{a, f, g, h\} \subset \{a, f, g, h, d, e\}$

$S_3' = \{\{a, f, g, h\}, (\{a, f, g, h, d, e\} \setminus \{a, f, g, h\}) \cup \{v\}\}$
$= \{\{a, f, g, h\}, \{d, e, v\}\}$

S_3' ist ein Split für den Graphen G_2'



$\Rightarrow$ Kante w = Kante x und Kante v = Kante y

$\Rightarrow$ $G_3' = G_2$ und $G_4' = G_4$ und $G_1' = G_3$

<u>Beweis:</u>

1. $G_1 = G(E_1; e) = \langle V(E_1), E_1 \cup \{e\} \rangle$

   $G_2 = G_1(E_3; f) = \langle V(E_3), E_3 \cup \{f\} \rangle$ (da $E_3 \subset E_1$)

   $G_3 = G(E_3; f) = \langle V(E_3), E_3 \cup \{f\} \rangle$

$\Rightarrow G_2 = G_3$

$\Rightarrow G(E_1; e)(E_3; f) = G(E_3; f)$

2. $G_4 = G_1((E_1 \setminus E_3)) \cup \{e\}; f) = \langle V((E_1 \setminus E_3) \cup \{e\}), ((E_1 \setminus E_3) \cup \{e\} \cup \{f\}) \rangle$

   $G_5 = G(E_4; f) = \langle V(E_4), E_4 \cup \{f\} \rangle$

   $G_6 = G_5((E_4 \setminus E_2) \cup \{f\}; e) = \langle V((E_4 \setminus E_2) \cup \{e\}), ((E_4 \setminus E_2) \cup \{e\} \cup \{f\}) \rangle$

   $E_1 \setminus E_3 = E_4 \setminus E_2$

$\Rightarrow G_4 = G_6$

$\Rightarrow G(E_1; e)((E_1 \setminus E_3) \cup \{e\}; f) = G(E_4; f)((E_4 \setminus E_2) \cup \{f\}; e)$

Theorem 2

Sei G ein zusammenhängender Graph, dann generiert jede kompatible Splitmenge von G eine eindeutige Zerlegung von G.

Bedeutung:

Wie schon bekannt, lässt sich jede Zerlegung von G darstellen durch eine geordnete, kompatible Menge von Splits von G. Nach diesem Theorem ist die Reihenfolge der Elemente unerheblich und eine Zerlegung von G lässt sich eindeutig durch eine kompatible Menge von Splits von G beschreiben.

Beweis:

- Sei $\{\{A_i, B_i\} | i \in I\}$ eine kompatible Splitmenge von G
- durch feste Reihenfolge wird eine eindeutige Zerlegung generiert
- jede Reihenfolge von I kann man erhalten durch vertauschen zweier benachbarter Elemente von I

$\Rightarrow$ z.z.: Zerlegung D, die wir erhalten durch die Reihenfolge
S: $i_1, i_2, ..., i_{j-1}, i_j, i_{j+1}, i_{j+2}, \ldots, i_k$ von I ist identisch mit der Zerlegung D',
die wir erhalten durch die Reihenfolge S': $i_1, i_2, ..., i_{j-1}, i_{j+1}, i_j, i_{j+2}, ..., i_k$

- Sei $D_0=D_0'=\{G\}$ und D_m (D_m') $1 \leq m \leq k$ bezeichnet die Zerlegung von G generiert bei den Splits $\{A_i, B_i\}$ beim Durchlaufen der ersten m Elemente von S (S')

$\Rightarrow D_{j-1}=D_{j-1}'$

1. $\{A_j, B_j\}$ und $\{A_{j+1}, B_{j+1}\}$ induzieren Splits für unterschiedliche Elemente in D_{j-1}

$\Rightarrow D_{j+1}=D_{j+1}'$

2. $\{A_j, B_j\}$ und $\{A_{j+1}, B_{j+1}\}$ induzieren Splits für dasselbe Element in D_{j-1}
   $\Rightarrow$ nach *Lemma 4* gilt $D_{j+1}=D_{j+1}'$

$\Rightarrow D_{j+1}=D_{j+1}'$

Theorem 3

Sei G ein zusammenhängender Graph, dann hat G eine eindeutige minimale Zerlegung, deren Elemente keinen guten Split besitzen.

Beweis:

- Sei D eine Zerlegung von G und D wurde generiert durch die Splitmenge S
- Wenn es einen guten Split von G gibt, der nicht in S enthalten ist, so existiert nach *Lemma 2* ein Element in D, welches einen guten Split besitzt.

$\Rightarrow$ jeder gute Split von G ist in S enthalten

- D' ist Zerlegung von G generiert durch die Menge aller guten Splits von G (Reihenfolge der Abarbeitung ist nach *Theorem2* egal)

$\Rightarrow$ nach *Lemma 3* kann D' kein Element enthalten, das einen guten Split besitzt

Nun ist nach dem Beweis von *Theorem 3* noch zu zeigen, dass jeder Graph, der keinen guten Split besitzt, 3-zusammenhängend, ein Polygon oder ein Band ist.

<u>*Lemma 5*</u>

Seien $\{E_1, E_2\}$, $\{E_3, E_4\}$ Splits von G, so dass $|E_1\cap E_2|\geq 2$ und $E_1\cup E_3\neq E$, so ist $\{E_1\cap E_3, E_2\cup E_4\}$ ein Split von G.

<u>Beweis:</u>

Notation: $W(A)= V(G(A)) \cap V(G(E\backslash A))$

$W(E_1\cap E_3), W(E_2\cap E_4)\subseteq W(E_1) \cup W(E_3)$
Jedes Element v von $W(E_1\cap E_3) \cap W(E_2\cap E_4)$ ist auch Element von $W(E_1) \cap W(E_3)$. Wenn dem nicht so ist, wäre $v\in W(E_1)\backslash W(E_3)$ und v wäre zu keinem Element aus E_4 inzident und $v\notin W(E_2\cap E_4)$

$\Rightarrow |W(E_1\cap E_3)|+|W(E_2\cap E_4)| \leq | W(E_1) \cap W(E_3)|+|W(E_1) \cup W(E_3)| = |W(E_1)|+|W(E_3)| = 4$

Wir haben aber gegeben, dass $E_2\cap E_4$ nicht leer ist, und da G 2-zusammenhängend ist, gilt: $|W(E_2\cap E_4)| \geq 2$
Daraus folgt die Korrektheit des *Lemma 5.*

<u>*Lemma 6*</u>

Sei G ein Graph, der weder 3-zusammenhängend ist, noch gute Splits besitzt, dann existiert eine Ordnung $e_0, e_1, ..., e_{n-1}$ von E, so dass für $0\leq i\leq n-1$ gilt:
$\{\{e_i, e_{i+1}\}, E\backslash\{e_i, e_{i+1}\}\}$ ist ein Split von G (Indizes modulo n)

<u>Beweis:</u>

Für $|E| \leq 4$ leicht zu zeigen.
Angenommen das Lemma ist war für alle G' mit $|E| \leq m \geq 4$. Wir haben gegeben einen Graphen G mit $|E| = m+1$, der nicht 3-zusammenhängend ist und auch keinen guten Split besitzt. G besitzt dann einen Split $\{E_1, E_2\}$. Bezeichne G_i jetzt $G(E_i; e)$ für i = 1 und 2 mit $e\notin E(G)$ und fordern, dass G_1 und G_2 keine guten Splits haben. Sei $\{A, (E_1\backslash A)\cup\{e\}\}$ ein Split von G_1, dann ist $\{A, E\backslash A\}$ nach *Lemma 1* ein Split von G. Es existiert nun ein Split $\{B, E\backslash B\}$ von G der $\{A, E\backslash A\}$ kreuzt.

Fall 1: $B\subseteq E_1$

Nach *Lemma 1* ist nun $\{B, (E_1\backslash B)\cup\{e\}\}$ ein Split von G_1. Damit gilt $B\cap A$ ist nicht leer, $((E_1\backslash A))\cup\{e\})\cap((E_1\backslash B))\cup\{e\})$ ist nicht leer und $A\cap((E_1\backslash B)\cup\{e\})$ ist ebenfalls nicht leer. Ist nun $B\cap((E_1\backslash A))\cup\{e\})$ nicht leer, dann ist $B\subseteq A$ was aber nicht erfüllbar ist.
$\Rightarrow \{A, (E_1\backslash A))\cup\{e\}\}$ ist kein guter Split von G_1

Fall 2: $B\cap E_2$ ist nicht leer

Nach *Lemma 5* ist $\{E_1\backslash B, B\cup E_2\}$ ein Split von G, dadurch ist nach *Lemma 1* $\{E_1\backslash B, (E_1\cap B)\cup\{e\}\}$ ein Split von G_1. A schneidet nun $E_1\backslash B$ und $(E_1\cap B)\cup\{e\}$ weil $\{A, E\backslash A\}$ den Split $\{B, E\backslash B\}$ kreuzt, $E_1\backslash B$ schneidet $(E_1\backslash A)\cup\{e\}$ weil $E\backslash B$ schneidet $E_1\backslash A$, $(E_1\cap B)\cup\{e\}$ schneidet $(E_1\backslash A)\cup\{e\}$ (wegen $\{e\}$).
$\Rightarrow \{A, (E_1\backslash A))\cup\{e\}\}$ ist kein guter Split von G_1

G_1 besitzt also keinen guten Split, dementsprechend besitzt auch G_2 keinen guten Split.
Es existiert nun ein Split von G der $\{E_1, E_2\}$ kreuzt. Es folgt nun aus *Lemma 1* und *Lemma 5*, dass für i=1 und 2 G_i nicht 3-zusammenhängend ist, sofern $|E_i|=2$.
Aus unserer Induktionsannahme und dem *Lemma 1* können wir schließen, dass eine Ordnung $c_1, c_2, ..., c_p$ von E_1 und $d_1, d_2, ..., d_q$ von E_2 existiert, so dass

$\{\{c_i, c_{i+1}\}, E\backslash\{c_i, c_{i+1}\}\}$ ein Split von G ist für i=1, 2, ...,p-1 und $\{\{d_i, d_{i+1}\}, E\backslash\{d_i, d_{i+1}\}\}$ ein Split von G ist für i=1, 2, ...,q-1.
Aus *Lemma 5* folgt nun, dass $\{\{c_i, c_{i+1}, \ldots, c_j\}, E\backslash\{c_i, c_{i+1}, \ldots, c_j\}\}$ ein Split von G ist, mit $1 \leq i < j \leq p$ und $\{\{d_i, d_{i+1}, \ldots, d_j\}, E\backslash\{d_i, d_{i+1}, \ldots, d_j\}\}$ ein Split von G ist, mit $1 \leq i < j \leq q$.
Wir können jetzt einen Split $\{E_3, E_4\}$ von G und eine Ordnung $c_1, c_2, ..., c_p$ und $d_1, d_2, ..., d_q$ auswählen, so dass $\{E_3, E_4\}$ den Split $\{E_1, E_2\}$ kreuzt und $\{c_p, d_1\}\subseteq E_3$.
Nach *Lemma 5* sind die Partitionen $\{E_5, E_6\}$ und $\{E_7, E_8\}$ von E, gegeben durch $E_5=E_3\cap(E_1\cup\{d_1\})$ und $E_7=E_5\cap(E_2\cup\{c_p\})$, Splits von G. Also ist auch $\{\{c_p, d_1\}, E\backslash\{c_p, d_1\}\}$ ein Split von G. Benutzt man diesen Fakt und *Lemma 5* so kann man zeigen, das $\{\{c_1, d_q\}, E\backslash\{c_1, d_q\}\}$ ebenfalls ein Split von G ist.
Nun ist $c_1, c_2, ... c_p, d_1, ..., d_q$ die gesuchte Ordnung von E und das *Lemma 6* ist durch Induktion bewiesen.

Theorem 4

Sei G ein zusammenhängender Graph, dann hat G genau dann keine guten Splits, wenn G 3-zusammenhängend , ein Polygon oder ein Band ist.

Beweis:

Angenommen G hat keine guten Splits und ist weder 3-zusammenhängend noch ein Polygon. Dann existiert nach *Lemma 6* eine Ordnung $e_0, e_1, ..., e_{n-1}$ von E und ein Split $\{E_1, E_2\}$ von G und natürliche Zahlen i, j, k mit $0< i < j < k < n$, so dass $e_0, e_j \in E_1$ und $e_i, e_k \in E_2$. Wenden wir nun das *Lemma 5* an, so erhalten wir einen Split $\{E_3, E_4\}$ mit $E_3=E_1\cap\{e_0, e_1, ..., e_j\}$. Nach wiederholter Anwendung erhalten wir einen Split $\{E_5, E_6\}$ mit $E_5=E_3\cap\{e_j, e_{j+1}, ..., e_{n-1}, e_0\}=\{e_0, e_j\}$.
Sei nun m eine natürliche Zahl mit $2 \leq m \leq j-1$. Nach *Lemma 5* ist $\{E_7, E_8\}$ ein Split von G mit $E_8=E_2\cup\{e_1, e_2, ..., e_{j-1}\}$ und $\{E_9, E_{10}\}$ ist ein Split von G mit $E_9=E_7\cup\{e_m, e_{m+1}, ..., e_j\}$.
Wiederholt man nun das Argument am Anfang des Beweises und ersetzt $\{E_1, E_2\}$ durch $\{E_9, E_{10}\}$, e_i durch e_1 und e_j durch e_m, so ist $\{\{e_0, e_m\}, E\backslash\{e_0, e_m\}\}$ ein Split von G. Ein ähnliches Argument kann man anwenden in dem Fall, dass $j+1 \leq m \leq n-2$. Es folgt für $1 \leq m \leq n-1$, dass $\{\{e_0, e_m\}, E\backslash\{e_0, e_m\}\}$ ein Split von G ist. Sei nun $\{E_1, E_2\}$ eine Partition von E, so dass $|E_1| \geq 2 \leq |E_2|$, dann können wir annehmen, dass $e_0 \in E_1$. Wir benutzen den Split $\{\{e_0, e_j\}, E\backslash\{e_0, e_j\}\}$ für $e_j \in E_1\backslash\{e_0\}$ und wenden *Lemma 5* wiederholt an, dann erhalten wir, dass $\{E_1, E_2\}$ ein Split von G ist. Somit ist G ein Band und der Beweis ist komplett.

4 Literatur

Edmonds & Cunningham: A combinatorial decomposition theory. Canadian Journal of Mathematics 32 (1980) 734-765