

# Prinzipien der Quantentheorie

## Grundlagen, Entwicklung und Interpretationen

Ausarbeitung zum Referat im Seminar Quantencomputer im SS 2002  
Institut für Informatik, Freie Universität Berlin

Autoren:

Karsten Rölling <[roelling@inf.fu-berlin.de](mailto:roelling@inf.fu-berlin.de)>, Matr. 3125452  
Lukasz Pekacki <[pekacki@inf.fu-berlin.de](mailto:pekacki@inf.fu-berlin.de)>, Matr. 3373460

### Inhalt:

- Einführende Experimente
  - Black-Body-Radiation
  - 2-Schlitz-Experiment
- Theoretischer Teil
- Geschichte
- Interpretationen
- Aktueller Stand

# Einleitung

Die Quantentheorie ist ein Konstrukt, das uns dabei helfen soll, Vorgänge in der Natur zu beschreiben, vorauszusagen und zu erklären. Was die Beschreibung und Vorhersage angeht, so leistet sie gute Dienste. Es sind bis heute keine Widersprüche zwischen ihren Vorhersagen und den Ergebnissen ihrer Experimente bekannt geworden. Die Quantenmechanik ist daher derzeit das beste mathematische Modell, die physikalische Welt im Kleinen zu beschreiben. Ohne sie müssten wir auf zahlreiche Dinge des modernen Lebens verzichten. Beispielsweise verdanken wir ihr den Transistor oder den Laser. Leider liefert die Quantentheorie bisher keine anschauliche Erklärung der Vorgänge in einem Quantensystem.

Im folgenden stellen wir einige Experimente vor, die mit der klassischen Physik nicht erklärt werden konnten und somit zur Entwicklung der Quantentheorie führten.

# Einführende Experimente

## Black-body radiation problem

Ein geschlossener Kasten ohne Inhalt hat eine bestimmte Temperatur. Die klassischen physikalischen Gesetze sagen voraus, dass der Kasten seine Energie komplett in sein Inneres abstrahlt. Beobachtet wird aber ein Gleichgewicht zwischen Temperatur und Strahlung. Dieser Widerspruch lies sich nicht mit der klassischen Physik erklären.

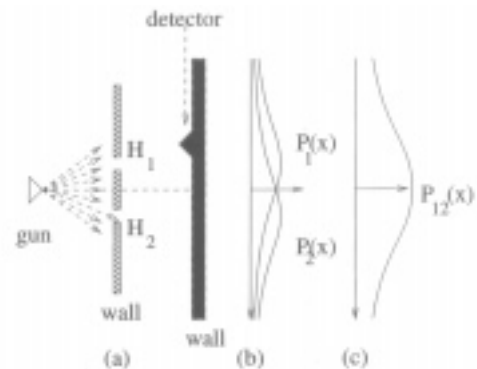
## 2-Schlitz-Experiment: Teilchen

Ein Maschinengewehr sendet Kugeln in zufällige Richtungen. Die Kugeln passieren Schlitze in einer ersten Wand und treffen auf eine zweite Wand, an der die gezählt werden, auf.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel am Ort  $x$  auftrifft beträgt:

$$P_{12}(x) = \frac{1}{2}(P_1(x) + P_2(x)), \text{ wobei } P_I(x) \text{ die}$$

Wahrscheinlichkeit ist, dass die Kugel an der Stelle  $x$  aufschlägt, wenn Spalt  $H_I$  offen ist.



## 2-Schlitz-Experiment: Wellen

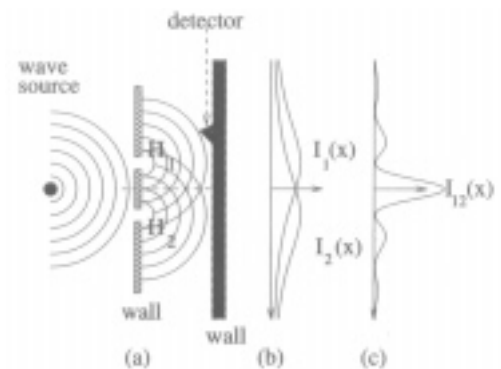
Ähnlich dem Aufbau des vorhergehenden Experimentes sendet eine Wellenquelle vor den beiden Wänden Wellen aus. Ein Detektor an der zweiten Wand misst die Intensität der dort ankommenden Welle.

Da sich Wellen an verschiedenen Orten gleichzeitig ausbreiten, treten sie in Interaktion, wenn beide Schlitze geöffnet sind.

Daher gilt für die Intensitäten:

$$I_{12} = |h_1(x) + h_2(x)|^2, \text{ wobei } h_i(x) \text{ die Höhenamplitude der}$$

Welle ist, die sich bei offenem Schlitz  $H_i$  ausbreitet.



# Partikel-Interferenz

Führt man das gleiche Experiment mit einer Elektronenquelle aus und einem Detektor, der die Anzahl der auftreffenden Elektronen an der zweiten Wand misst, so erhält für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron an Punkt  $x$  der zweiten Wand ankommt:

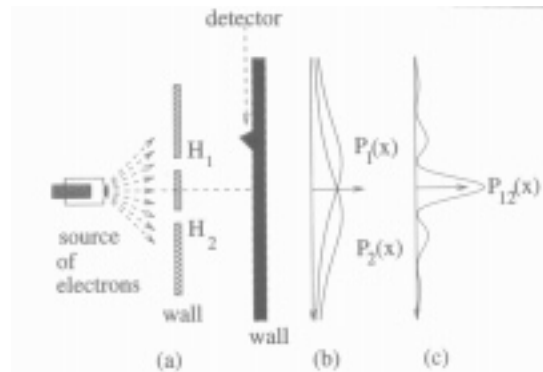
$$P_{12}(x) = |\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2, \text{ wobei } \psi_1(x) \text{ die komplexe}$$

Amplitude dafür ist, dass ein Elektron bei geöffnetem H1 an der Stelle  $x$  ankommt.

Das Elektron scheint sich wie ein Teilchen zu

verhalten, wenn nur ein Schlitz offen ist. Sind beide

Schlitze geöffnet, so erhält man ein Ergebnis, das dem Elektron Wellencharakter zuschreibt. Diese Beobachtung macht man auch, wenn man jeweils nur ein Elektron sendet. Das Elektron scheint die beiden Spalte gleichzeitig zu durchlaufen und anschließend wie eine Welle mit sich selbst zu interferieren.



# Experiment mit Beobachter

Um sich dieses ungewöhnliche Ergebnis zu erklären, haben Wissenschaftler versucht, die Bahn des Elektrons zu verfolgen. Eine beispielhafte Versuchsanordnung dafür ist die Verwendung einer Lichtquelle zwischen den beiden Wänden, mit deren Hilfe beobachtet werden kann, durch welchen Schlitz das Elektron geflogen ist.

Das Ergebnis ist ernüchternd. Man erhält nur dann ein Interferenzmuster, wenn man die Lichtquelle ausschaltet. Benutzt man das Licht, um das Elektron zu lokalisieren, dann verhält sich dieses wie ein Teilchen und erzeugt keine Interferenzmuster.

Der Umstand der Messung wirkt sich auf das Messergebnis aus. Nur wenn das Elektron unbeobachtet bleibt, passiert es den Doppelschlitz auf Quantenebene und erzeugt das Interferenzmuster.

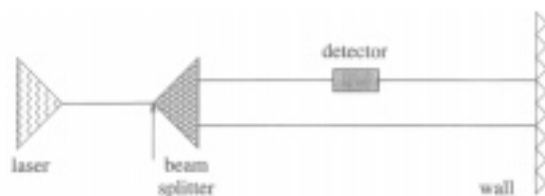
# Laser-Splitter Experiment

Verschiedene Wissenschaftler versuchten mit unterschiedlichen Anordnungen, den Weg eines Teilchens zu bestimmen, ohne die Quanteneigenschaften des Versuchsablaufs zu beeinflussen. Ein berühmter Versuch beruht auf einer Laser-Splitter-Anordnung. Man verwendet einen Kristall, der ankommendes Laserlicht in genau zwei Strahlen teilt. An einer weit entfernten Wand ist das typische Interferenzmuster zu beobachten.

Nun bringt man einen Photonendetektor in ausreichendem Abstand zum Splitter an, so dass sichergestellt ist, dass man den Detektor an- und ausschalten kann, nachdem das Photon den Splitter passiert haben muss. Dabei geht man davon aus, dass es sich mit

Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

Erstaunlicherweise erhält man jedoch dasselbe Ergebnis wie bei allen anderen Versuchen, den Weg eines Teilchens zu messen. Das Ergebnis weist keine Interferenz mehr auf, sobald das Teilchen lokalisiert ist.



## Stern-Gerlach Anordnung

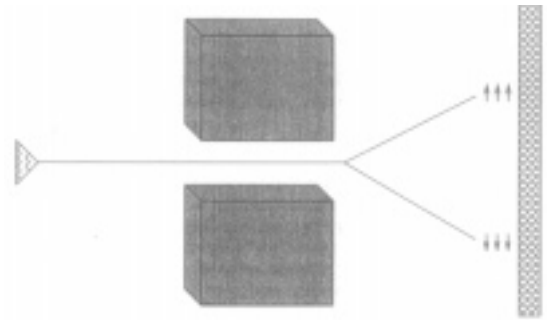
Ähnliche Ergebnisse haben die Berliner Wissenschaftler Stern und Gerlach erhalten.

Sie arbeiteten dabei nicht mit kleinen Teilchen wie z.B. Elektronen, sondern mit Atomen.

Im Versuchsaufbau sendet eine Atomenquelle Atome mit zufälliger magnetischer Polarisierung aus. Dieser Strahl durchläuft das Magnetfeld eines statischen Magneten.

Das erwartete Ergebnis, dass nämlich die Atome, je nach Stärke ihrer Ausrichtung, verstreut auf den Schirm

treffen, hat sich nicht eingestellt. Stattdessen beobachteten die Wissenschaftler, dass nur an zwei Stellen, in der Richtungsachse des Magnetfeldes Atome eintreffen. Die Atome scheinen sich im Magnetfeld in zwei Gruppen zu teilen.



## Stern-Gerlach mit mehreren Magneten

In der Fortführung des Stern-Gerlach-Experimentes lässt man die zwei entstandenen Atomstrahlen wiederum durch ein Magnetfeld laufen. Ist das Magnetfeld genauso ausgerichtet, wie das ursprüngliche, dann beobachtet man keine Trennung des Strahls. Hingegen bei einem – beispielsweise um  $90^\circ$  - gedrehten Magneten, zeigt sich wiederum die strikte Trennung in zwei Gruppen.

Dieses Verhalten wird wie folgt erklärt: Vor dem Durchlaufen des Magnetfeldes haben die Atome in der eingestellten Feldrichtung noch keine Ausrichtung. Sie werden erst durch das Magnetfeld auf die eine oder andere Ausrichtung in Richtung der Magnetfeldachse festgelegt.

# Theoretischer Teil

## Zustände, Ereignisse, Amplituden

Als Zustand eines Quantensystems bezeichnen wir die vollständige Beschreibung des Systems.

Ein Ereignis ist ein Tupel aus Anfangszustand  $S$  und Endzustand  $F$ , die Schreibweise für ein Ereignis  $E$  ist:  $E = (F, S)$ .

Eine Amplitude ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, ausgedrückt durch:  $p = |\alpha|^2$

Wobei die komplexe Zahl  $\alpha$  die komplexe Wahrscheinlichkeitsamplitude ist; sie entspricht dem Ergebnis des inneren Produktes aus Anfangszustand und Endzustand:  $\langle F | S \rangle$ .

## Konstruktion von Ereignissen aus Unterereignissen

Kann man ein Ereignis in Unterereignisse aufteilen, so gilt für die Amplitude des Ereignisses:

- sie ist das Produkt der Unterereignisse, falls diese aufeinanderfolgend sind
- die ist die Summer der Unterereignisse, falls diese unabhängig voneinander sind

So gilt für das Zweischlitzexperiment für das Ereignis, dass ein Elektron, kommend von  $s$ , am Ort  $x$  auftritt:

- $\langle x | s \rangle = \langle x | \text{Wand} \rangle \langle \text{Wand} | s \rangle$
- $\langle x | s \rangle =$   
 $\langle x | 1 \rangle \langle 1 | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle +$   
 $\langle x | 2 \rangle \langle 2 | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle$

$\langle x | i \rangle$  Amplitude für Erreichen von  $x$  nach Verlassen von Schlitz  $i$

$\langle i | i \rangle$  Amplitude für Ankunft an  $i$  und Verlassen an  $i$

## Basiszustände

Eine Menge  $B = \{i \mid i \text{ ist Zustand}\}$  ist eine Menge von Basiszuständen, wenn für alle  $i, j$  aus  $B$  gilt:

$$\langle i | j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für jeden Anfangszustand  $X$  und einen beliebigen Endzustand  $Y$  gilt:

$$\langle Y | X \rangle = \sum_{i \in B} \langle Y | i \rangle \langle i | X \rangle$$

Jeder Zustand kann also beschrieben werden durch Übergangsamplituden von und zu den Basiszuständen.

$$|\phi\rangle$$

## Quantenmessung

Gegeben sei ein Test  $T$  und ein Quantenzustand  $|\phi\rangle$ . Problem: Welche Art Information kann  $T$  aus  $|\phi\rangle$  gewinnen?

Eine Observable  $O = \{E_1, \dots, E_k\}$  ist eine Menge von disjunkten und paarweise orthogonalen Unterräumen eines Hilbertraums  $H$ , so dass gilt:  $H = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_k$

Ausserdem sei  $\mu : \{E_1, \dots, E_k\} \rightarrow R$  eine injektive Abbildung.

Dann gilt:  $|\phi\rangle = \sum_{i=1}^k \alpha_i |\phi_{E_i}\rangle$ , mit  $|\phi_{E_i}\rangle$  als Projektion von  $|\phi\rangle$  auf  $E_i$  und  $\langle \phi_{E_i} | \phi_{E_i} \rangle = 1$  für alle  $i$ .

Konsequenzen einer Quantenmessung:

1. Es wird ein  $E_i$  gewählt und der Wert  $\mu(E_i)$  erzeugt. Die Wahrscheinlichkeit für die Wahl von  $E_i$  beträgt  $|\alpha_i|^2$ .
2. Nach der Messung „kollabiert“  $|\phi\rangle$  in den Zustand  $|\phi_{E_i}\rangle$ .
3. Die erhaltene „klassische“ Information besagt, welcher Unterraum  $E_i$  gewählt wurde:  $\mu(E_i) = i$

Eine Messung in einem n-dimensionalen Hilbertraum kann bis zu n verschiedene Ergebnisse produzieren.

$$H = H_1 \otimes H_2$$

## Zusammengesetzte Quantensysteme

Seien  $S_1$  und  $S_2$  Quantensysteme mit den Hilberträumen  $H_1$  und  $H_2$ . Sei  $S$  die Zusammensetzung aus  $S_1$  und  $S_2$ . Dann gilt:

1.  $H = H_1 \otimes H_2$  ist der Hilbertraum von  $S$ .
2. Observable von  $S$  sind selbstadjungierte Operatoren in  $H$ .
3. Entwicklungen in  $S$  werden dargestellt durch unitäre Operatoren von  $H$ .

## Entwicklungen von Quantensystemen

Die bisher aufgeführten Prinzipien gehen davon aus, dass der Anfangszustand unverändert, statisch ist. In der Realität ist das nicht so. Gerade bei Quantenrechnern möchte man gerne Transformationen der Anfangszustände verwenden. Aus physikalischer Sicht, verwendet man dazu einen Apparat  $A$ .

Mathematisch wird das Problem durch einen Operator  $A$  gelöst:  $\langle Y|A|X \rangle$ ; im Modell der Hilberträume ist  $A$  eine unitäre Matrix  $M$ , die einen Zustand  $i$  in einen Zustand  $j$  umwandelt:  $M_p^B[i, j]$

Die besondere Eigenschaft der unitären Abbildung ist, dass die Werte der Vektoren nicht verändert werden, sondern nur die Richtungen. Man führt also eine Spiegelung des Hilbertraums in einen anderen Hilbertraum durch.

# Geschichte

## Plancksche Konstante

1900 erkannte Max Planck, dass Elektromagnetische Schwingungen Energie nur in „Quanten“ transportieren können:

$$E = h\nu$$

$h$  kennt man als Plancksche Konstante.

Auch Elektromagnetische Felder können nur in diskreten Einheiten existieren, womit Albert Einstein 1905 den photoelektrischen Effekt erklärte (für diese Leistung erhielt er 1921 den Physik-Nobelpreis).

## Quantentheorie

1913 begründete Niels Bohr die „alte Quantentheorie“. Sie erklärte, warum Elektronen, die einen Atomkern umkreisen, nicht einfach in diesen hineinstürzen (wie es die klassische Physik voraussagt): Das Drehmoment der Elektronen um den Kern entspricht einem diskreten Vielfachen von  $h/2\pi$ . Somit sind nur bestimmte Bahnen möglich.

Die moderne Quantentheorie wurde von 1923 bis 1927 entwickelt:

- 1923: Louis de Broglie erkennt Welle-Teilchen-Dualität (Wellenmechanik)
- 1925: Werner Heisenberg entwickelt Matrizenmechanik
- 1926: Erwin Schrödinger erweitert Wellen- zur Quantenmechanik
- 1927: Heisenberg formuliert Unschärferelation

Die Quantenmechanik ist der mathematische Unterbau der modernen Quantentheorie. Bis zum Beweis der Äquivalenz von Quanten- und Matrizenmechanik war dieser Entstehungsprozess von heftigen Diskussionen der beteiligten Physiker begleitet. Auch danach gab es Stimmen, welche die „Zerstörung“ des klassischen Determinismus nicht akzeptieren wollten.

## Heisenbergs Unschärferelation

Heisenberg hat aufgrund seiner Forschungsergebnisse eine Relation postuliert, die in der Physik jahrelang für Aufruhr sorgte: die Unschärferelation. Danach ist es in einem Quantenexperiment unmöglich, gleichzeitig Ort und Moment eines Teilchens genau zu messen. Bei jeder Messung der einen Eigenschaft gibt es eine Unschärfe, die umso größer wird, je genau man die andere Eigenschaft gleichzeitig misst.

Verallgemeinert auf die Hilberträume und die Messung mit Hilfe von Observablen gilt nach der Unschärferelation für zwei Observable  $A, B$ :

$$\Delta A \psi \Delta B \psi \geq \frac{1}{2} |\langle AB - BA \rangle \psi|$$

Im folgenden Beispiel möchten wir die Anwendung dieser Formel vorführen.

## Beispiel: Polarisierte Photonen

In der Quantenkryptographie macht man sich die Eigenschaft zunutze, dass Photonen polarisiert sind. Im Zentrum des Interesses stehen dabei linear polarisierte Photonen.

Es ist nicht möglich für ein gegebenes Photon dessen Polarisierung zu messen. Man kann aber mit Hilfe von Filtern, die als Eingabe zufällig polarisierte Photonen erhalten, in einem bestimmten Winkel polarisierte Photonen erhalten.

Es stellt sich die Frage, ob man mit Hilfe von zwei verschiedenen Filtern gleichzeitig die horizontale/vertikale Polarisation und die diagonale Polarisation unterscheiden kann.

Überträgt man diese Fragestellung in das Modell der Hilberträume, dann entsprechen die Filter für horizontale/vertikale Polarisation und für diagonale Polarisation zwei Observablen  $A_r$  und  $A_d$ .

Nach der obigen Form der Heisenbergschen Unschärferelation ist die Messung genau dann möglich, wenn die beiden Observablen kommutativ sind.

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Da die beiden Observablen nicht kommutativ sind, ist die gleichzeitige Messung der beiden Polarisationen nicht möglich. Will man die Messung durchführen, so wird die Messung der einen Polarisation umso unschärfer, je genauer man die andere Polarisation misst.

## EPR Experiment

Einstein war nicht mit der Erklärung zufrieden, dass Ergebnisse in Teilchenexperimenten nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu erhalten sind. Im berühmten EPR-Experiment, einem Gedankenexperiment, versucht er, die Unschärferelation in einen Widerspruch zu führen:

- Man nehme zwei Photonen mit gleichem Moment, die sich entgegengesetzt voneinander entfernen. Nun messe man die Geschwindigkeit des einen Photons gleichzeitig mit der Position des anderen. So erhält man auf indirektem Wege Moment und Position der beiden Teilchen.
- Auf diese Weise ist gezeigt, dass Moment und Position eines Teilchens Elemente einer bestehenden physikalischen Realität sind und nicht erst durch Messung gesetzte Werte.

Bohr hat diesen Widerspruch widerlegt, indem er nachgewiesen hat, dass die gleichzeitige Messung inkompatibler Werte (Ort, Geschwindigkeit) nicht erlaubt ist.

## Interpretationen der Quantentheorie

Man muss unterscheiden zwischen der formalen (mathematischen) Basis einer Theorie und der Interpretation ihrer realen Auswirkungen. Die formalen Grundlagen der Quantenmechanik sind experimentell bestätigt, aber ihre Interpretation ist (in letzter Zeit zunehmend) strittig. Das Problem dabei: Aufgrund der Natur der Quantenmechanik ist prinzipiell keine Beobachtung von Quantenvorgängen möglich.



# Kopenhagener Interpretation

Diese beliebteste Interpretation der Quantentheorie wurde 192 von Heisenberg und Bohr begründet. Sie verneint die Existenz einer für alle Beobachter gleichen objektiven Realität. Zudem besagt sie, dass erst durch Messung eines Quantenzustands aus einem Wahrscheinlichkeitsfeld ein reeller Wert wird.

Der Hauptvorwurf durch ihre Kritiker: Sie klammert die unerklärten Effekte der Quantenmechanik einfach aus, indem sie diese als nicht erklärbar definiert. Ein bekanntes Beispiel, dass die Unsinnigkeit der Kopenhagener Interpretation aufzeigen sollte, ist „Schrödingers Katze“. Der Begriff beschreibt ein von Schrödinger erdachtes Gedankenexperiment, bei dem eine Katze mit einem zufälligen Freisetzungsmechanismus für ein tödliches Gas in eine Kiste gesperrt wird. Überträgt man nun die quantenmechanische Betrachtungsweise auf dieses makroskopische Beispiel (was in der Praxis allerdings nicht zutrifft), wäre die Katze, solange man nicht nachschaut, in einem Überlagerungszustand zwischen Leben und Tod, der sich erst auflöst, wenn man die Kiste öffnet.

# Alternative Interpretationen

Die Versteckte-Variablen-Interpretation beruht auf Einsteins Überzeugung, die stochastische Natur der Quantentheorie beruht auf nicht einsehbaren darunterliegenden Variablen („Gott würfelt nicht“), die nach klassischen Gesetzen funktionieren.

Die Viele-Welten-Interpretation besagt, dass alle möglichen Ergebnisse einer Quantenmessung in einem eigenen Universum Realität werden. Die Hauptkritik an ihr: Sie ist nicht überprüfbar.

# Aktueller Stand

Die Quantentheorie hat alle bis heute durchgeführten Tests bestanden und ist sogar Grundlage für viele (heute alltägliche) Anwendungen. Allerdings interessiert sich die moderne Physik zunehmend für ihre alternative Interpretationen, und es gibt auch regelmässig neue Erkenntnisse. So wurde kürzlich gezeigt, dass der grundlegende Faktor von Quanteneffekten nicht die Unschärferelation, sondern die Dualität von Welle und Teilchen ist. Es gibt auch noch offene Probleme im Zusammenhang mit der Quantentheorie. Es ist zum Beispiel bis heute nicht gelungen, eine Vereinigung von Quanten- und Relativitätstheorie zu vollziehen, die jeweils in ihrem Größenbereich experimentell voll bestätigt wurden, einander aber eigentlich widersprechen.

# Quellen

- J. Gruska. *Quantum Computing*. McGraw-Hill, 1999
- Spektrum der Wissenschaft Digest 1/99 Quantenphänomene
- Spektrum der Wissenschaft 11/2000 Michael Springer: Schrödingers Kätzchen werden erwachsen
- Spektrum der Wissenschaft 6/2000 Anton Zeilinger: Quanten-Teleportation