(1) Das lineare Programm

$$\begin{array}{rrrrrl}
\text{maximiere} & 19x_1 + & 13x_2 + & 12x_3 + & 7x_4 & \\
\text{unter} & 3x_1 + & 2x_2 + & x_3 + & 2x_4 & \leq 225 \\
& x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 & \leq 117 \\
& 4x_1 + & 3x_2 + & 3x_3 + & 4x_4 & \leq 420 \\
& & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0
\end{array}$$

hat die optimale Lösung (39,0,48,30). Berechne die Lösungen folgender Varianten des Problems mit Hilfe der Lösung des obigen Problems.

(a) $c_2 = 15$ statt $c_2 = 13$

(b) $b_3 = 125$ statt $b_3 = 117$

(c) eine neue Variable x_5 mit $a_{15} = 3, a_{25} = 1, a_{35} = 2$ und $c_3 = 14$ wird eingefügt

(d) eine neue Restriktion $x_3 \leq 4x_2$ wird eingefügt

(e) $a_{33} = 4$ statt $a_{33} = 3$

(2) Gegeben sei das Rucksackproblems

$$\begin{array}{rl}
\text{maximiere} & \sum_{j=1}^m c_j x_j \\
\text{unter} & \sum_{j=1}^m a_j x_j \leq b \\
& 0 \leq x_j \leq u_j \text{ für } j = 1, \ldots, m \\
& x_j \text{ ganzzahlig für } j = 1, \ldots, m
\end{array}$$

wobei die Variablen x_i so geordnet sind, daß $c_i/a_i \geq c_{i+1}/a_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, m-1$ ist.

Zeigen Sie, daß der Greedy-Algorithmus für das relaxierte Problem bei den Spezialfällen

- die oberen Schranken u_j sind nicht vorhanden (∞),
- die oberen Schranken u_j sind alle 1

eine Optimallösung liefert. Geben Sie dazu eine zulässige Lösung für das duale lineare Programm an, die den gleichen Zielfunktionswert hat.

(3) Lösen Sie das folgende Rucksackproblem mit dem Branch-and-Bound-Algorithmus.

$$\begin{array}{rl}
\text{maximiere} & \frac{7}{24}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{5}{24}x_3 + \frac{1}{6}x_4 \\
\text{unter} & 51x_1 + 45x_2 + 40x_3 + 30x_4 \leq 182 \\
0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ ganzzahlig} &
\end{array}$$

(4) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem der Greedy-Algorithmus für das (ganzzahlige) Rucksackproblem nicht die Optimallösung liefert.