(1) **Sensitivitätsanalyse** *Diese Aufgabe ist 8 Punkte wert*

Sei das linearen Programmes $\max\{\, c^t x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$ gegeben und eine Basislösung x^*, die zur Basis B gehört.

1. Wie ändert sich x^*, wenn die rechte Seite des linearen Programmes sich von b auf $b + t$ ändert, aber die Basis B beibehalten wird? Wie ändert sich die Zielfunktion?
2. Zeigen Sie: Ist x^* nichtentartet, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß folgendes erfüllt ist: Wenn $|t_i| \leq \varepsilon$ für $i = 1, \ldots, n$, dann ist die entsprechende Basislösung des geänderten linearen Programmes $\max\{\, c^t x \mid Ax = b + t, x \geq 0 \,\}$ zulässig.
3. Zeigen Sie: Wenn x^* optimal ist und die die entsprechende Basislösung des geänderten linearen Programmes $\max\{\, c^t x \mid Ax = b + t,\ x \geq 0 \,\}$ zulässig ist, dann ist sie für dieses lineare Programm auch optimal.
4. Zeigen Sie: Wenn x^* nichtentartetet und optimal mit Optimalwert z^* ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß gilt: Der Optimalwert des geänderten linearen Programmes $\max\{\, c^t x \mid Ax = b + t,\ x \geq 0 \,\}$ läßt sich im Bereich $|t_i| \leq \varepsilon$ für $i = 1, \ldots, n$ in der Form

$$z^* + \sum_{i=1}^{m} \pi_i t_i$$

mit geeigneten Koeffizienten π_i darstellen.

(2) **Stückweise lineare Funktionen**

Das Produktionsplanungsmodell vom 2.Übungszettel soll modifiziert werden. Die Rohstoffkosten pro Einheit sind nun nicht mehr unabhängig von der Menge des Rohstoffes, sondern steigen bei größeren Mengen.

Nehmen Sie an, daß der Preis für die ersten a_i Einheiten des i-ten Rohstoffs b_i Euro pro Einheit ist. Die nächsten c_i Einheiten dieses Rohstoffs kosten d_i Euro pro Einheit ($d_i > b_i$). Alles, was darüber hinausgeht, kostet e_i Euro pro Einheit ($e_i > d_i$).

1. Sei $a_1 = 5, b_1 = 7, c_1 = 10, d_1 = 10, e_1 = 12$. Geben Sie die stückweise lineare Funktion an, die den Rohstoffpreis in Abhängigkeit von der Stückzahl beschreibt. Skizzieren Sie diese Funktion.
2. Wie muß man das Produktionsplanungsmodell nun modifizieren, um dieses veränderte Rohstoffpreisverhalten bei allen Rohstoffen zu berücksichtigen?

(3) Sei eine stückweise lineare, konvexe Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nur durch die Eingabewerte $0 < p_1 < \ldots < p_s$ ihrer Knicke, die Steigungen $a_0 < \ldots < a_s$ und den Anfangswert $f(0) = K$ gegeben.

Geben Sie ein Verfahren an, wie man das Programm $\min\{\, f(x_1) \mid Ax \leq b, x \geq 0 \,\}$ lösen kann, indem Sie es auf ein gewöhnliches lineares Programm zurückführen.