6. Übung zur Vorlesung
Lineare Optimierung
Abgabe am 21. Dezember

WS 99/00
Rote/Morawe

(1) (a) Beweisen Sie: Wenn das primale Problem unbeschränkt ist, dann ist das duale Problem unzulässig.

(b) Gilt auch die umgekehrte Schlußfolgerung? Beweisen oder widerlegen Sie sie.

(2) Eine Menge M heißt konvex, wenn für je zwei Punkte $x, y \in M$ auch die Verbindungsstrecke $S(x, y) = \{\alpha x + (1-\alpha)y | \alpha \in [0, 1]\}$ in M enthalten ist.

Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

- P ist ein beschränktes Polyeder
- Es gibt n Punkte $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^d$ mit $P = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i | \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$

(3) Sei P ein nichtleeres Polyeder und $x \in P$. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen, die beschreiben, wann x eine Ecke von P ist.

- Es gibt keine Strecke in P, die x in ihrem Inneren enthält
- Entfernt man x aus P, so ist die entstehende Menge konvex
- Wird P durch das Ungleichungssystem $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ für $i = 1, \ldots, m$ beschrieben, dann ist x die eindeutige Lösung eines Systems $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ für einige $i \in [1, \ldots, m]$.

(Zusatzaufgabe: Zeigen Sie auch die Äquivalenz folgender Aussage: Wird P durch das Ungleichungssystem $Ax \leq b$ beschrieben , dann ist x die eindeutige Optimallösung eines linearen Programmes $\max \{ c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0 \}$)

(4) Maximale Kapazität in einem Telefonnetz.

Das Telefonnetz einer Telefongesellschaft besteht aus Vermittlungsknoten, die miteinander über Leitungen verbunden sind. Ein Gespräch zwischen zwei Vermittlungsknoten führt in der Regel über eine Folge von anderen Knoten. Für Gespräche zwischen zwei Knoten kann es verschiedene Wege geben. Die Kapazität der Vermittlungsknoten ist unbeschränkt, jedoch kann über jede einzelne Leitung nur eine gewisse Zahl von Gesprächen geführt werden. Die Telefongesellschaft möchte wissen, wie viele Telefongespräche maximal gleichzeitig zwischen zwei Vermittlungsknoten A und B geführt werden können.

Formulieren Sie ein lineares Optimierungsmodell für dieses Problem.