5. ÜBUNG ZUR VORLESUNG
LINEARE OPTIMIERUNG
Abgabe am 7. Dezember

WS 99/00
Rote/Morawe

(1) Ist der Punkte $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \frac{4}{3}, \frac{5}{12}, 0, 0)$ eine Optimallösung für das folgende lineare Programm?

$$\begin{array}{rl} \text{maximiere} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \\ \text{unter} & x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_5 \leq 3 \\ & x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Wenn ja, beweisen Sie es. Wenn nein, finden Sie eine bessere Lösung.

Verwenden Sie dazu nicht den Simplex-Algorithmus, sondern konstruieren Sie die zugehörige duale Lösung mit dem Satz vom komplementären Schlupf und interpretieren Sie diese Lösung geeignet.

(2) Betrachten Sie ein lineares Programm und das dazu duale. Zeigen Sie:

1. Wenn es eine Optimallösung y^* für das duale lineare Programm mit $y_i^* > 0$ für ein i $(1 \leq i \leq m)$ gibt, dann ist in *jeder* Optimallösung x^* des primalen Programms die entsprechende Ungleichung mit Gleichheit erfüllt: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$.
2. Wenn es eine Optimallösung y^* für das duale lineare Programm mit $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j$ für ein j $(1 \leq j \leq n)$ gibt, dann ist in *jeder* Optimallösung x^* des primalen Programms die entsprechende Variable gleich Null: $x_j^* = 0$.

(3) B sei eine optimale Basis eines linearen Programmes $\max\{ c^t x \mid x \in \mathbf{R}^{n+m}, Ax = b, x \geq 0 \}$, das aus dem linearen Programm in Standardform $\max\{ c^t x \mid x \in \mathbf{R}^n, A_0 x \leq b, x \geq 0 \}$ durch Einführen von Schlupfvariablen entstanden ist. Wie kann man die dualen Variablen y_i und y_{m+j} durch b, A_B, A_N, c_B, c_N ausdrücken?

(4) Dualität für lineare Programme mit Gleichungen und unbeschränkten Variablen.
Bringen Sie ein lineares Programm von der Art, wie sie im folgenden angegeben ist, in Standardform. Bestimmen Sie das duale Programm und vereinfachen Sie es.

1. ein lineares Programm, das in Standardform ist, außer daß die Variable x_1 unbeschränkt ist;
2. ein lineares Programm in Standardform mit einer zusätzlichen Gleichung als Restriktion.

Stellen Sie Regeln zur Bestimmung des dualen Programms für lineare Programme mit Gleichungen und unbeschränkten Variablen auf.

(5) Bearbeiten Sie das Party-Service-Problem, wie es auf dem 3. Übungszettel angegeben ist. AMPL ist mindestens auf den PCs 130 und 131 installiert, wahrscheinlich sogar auf allen in diesen Raum befindlichen.