4. Übung zur Vorlesung — WS 99/00
Lineare Optimierung — Rote/Morawe
Abgabe am 23. November

(1) Zeigen Sie: Das duale Problem zum dualen Problem ist wieder das primale Problem.

(Genauer: Wenn man das zu einem Problem (P) in Standardform duale Problem (D) in Standardform transformiert, und das zu diesem duale Problem (D′) wiederum in Standardform transformiert, dann erhält man das ursprüngliche Problem (P).)

(2) Das primale lineare Programm

$$\max \{ c^T x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0 \}$$

hat genau dann für jeden Vektor b eine Optimallösung, wenn das duale lineare Programm

$$\min \{ b^T y \mid A^T y \geq c,\, y \geq 0 \}$$

mindestens einen zulässigen Punkt y hat und es eine Schranke K gibt, so daß für jeden zulässigen Punkt y des dualen linearen Programms $\|y\|_\infty \leq K$ gilt.

(3) Formulieren Sie folgendes Problem als lineares Programm:
Für eine gegebene endliche Menge von Punkten in der Ebene soll ein Kreisring mit kleinster Fläche berechnet werden, der die Menge enthält. Wie viele Variablen und wie viele Restriktionen hat Ihr lineares Programm?

(4) Das Lemma von Farkas:
Es sei A eine reelle $(m \times n)$-matrix und b ein n-elementiger Vektor. Dann gilt:

Aus $Ax \leq 0$ folgt $b^T x \leq 0$ für alle $x \in \mathbf{R}^n$

genau dann wenn

Es gibt ein $y \geq 0$ mit $b^T = y^T A$.

Zeigen Sie dieses Lemma mit Hilfe des Dualitätssatzes der linearen Optimierung.