(1) Welche der folgende Optimierungsprobleme können Sie als lineare Programme formulieren (nicht unbedingt in Standardform)? Bei mindestens fünf Beispielen sollte es Ihnen gelingen.

(a) minimiere $\max\{z_1, z_2, z_3\}$
unter
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 5 \\ z_1 + 2\,z_2 - 2\,z_3 &\leq 4 \\ z_1, z_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) maximiere $3\,z_1 + 2\,z_2 + 4\,z_3$
unter
$$\begin{aligned} |\,z_1 + z_2 + z_3\,| &\leq 5 \\ z_1 + 2\,z_2 - 2\,z_3 &\leq 4 \\ z_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

(c) maximiere $3\,z_1 + 2\,z_2 + 4\,z_3$
unter
$$\begin{aligned} |\,z_1 + z_2 + z_3\,| &= 2 \\ z_1 + 2\,z_2 - 2\,z_3 &\leq 4 \\ z_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

(d) minimiere $|x_1| + |x_2| + |x_3|$
unter
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\in \mathbf{R} \end{aligned}$$

(e) minimiere $4 + |\,8\,x_1 - 2\,| + |\,x_1\,|$
unter
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 &\leq 4 \\ x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(f) minimiere $x_1 - |x_2| + |x_3|$
unter
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1 + 2\,x_2 - 2\,x_3 &\leq 4 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

(g) maximiere $3\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 + 6\,x_4 - x_5 - 2\,x_6 + 4\,x_7$
unter
$$\begin{aligned} & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 \leq 1/2 \\ & \max\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \leq \min\{x_5, x_6, x_7\} \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \leq 1 \end{aligned}$$

(2) (a) Formulieren Sie folgendes Problem als lineares Programm (oder als zwei lineare Programme):

Für zwei gegebene endliche Mengen von Punkten in der Ebene soll eine Gerade berechnet werden, die die beiden Mengen trennt.

(b) Formulieren Sie dasselbe Problem in beliebigen Dimensionen. Die beiden Mengen von Punkten sollen durch eine Hyperebene getrennt werden. Wie viele Variablen hat Ihr lineares Programm?

(3) Produktionsplanung: Eine Fabrik stellt aus verschiedenen Rohstoffen mit Hilfe verschiedener Produktionsmittel verschiedene Produkte her. Für jedes Produkt ist bekannt, welche Menge der Rohstoffe (zum Beispiel Holz, Energie) und der Produktionsmitteln (zum Beispiel Arbeitszeit, Maschinen) bei seiner Herstellung verbraucht wird. Für einen gewissen Zeitrahmen (zum Beispiel einen Monat) soll ein Produktionsplan erstellt werden. Dabei sind für den Verbrauch jedes Rohstoffes innerhalb dieses Zeitrahmens Obergrenzen und für jedes Produktionsmittel Kapazitätsgrenzen gegeben. Desweiteren liefert die Marktsituation für die Menge jedes Produkts eine obere und untere Schranke. Die Kosten für jeden Rohstoff, jedes Produktionsmittel und der Verkaufspreis für jedes Produkt ist bekannt. Der Gewinn soll maximiert werden.

Stellen Sie ein lineares Optimierungsmodell für dieses Problem auf. Führen Sie dazu Bezeichnungen für alle Daten und Entscheidungsvariablen ein und geben Sie genau an, was diese bedeuten. Unterscheiden Sie die Entscheidungsvariablen klar von den Daten. Wie viele Variablen und wie viele Restriktionen hat Ihr Modell? Wie viele der Restriktionen sind Gleichungen? Wie viele (von 0 verschiedene) Koeffizienten treten *insgesamt* in allen Restriktionen (höchstens) auf?

(4) Diese Aufgabe soll zeigen, daß die Aussage „ϵ_i soll bei der Perturbation im Simplex-Verfahren mit der lexikographischen Zeilenauswahlregel *klein genug* gewählt werden“ sinnvoll ist.

(a) Beweisen Sie: Die Folge $(r_0, r_1, \ldots, r_m)$ ist genau dann lexikographisch kleiner als die Folge $(s_0, s_1, \ldots, s_m)$, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß stets

$$r_0 + r_1\epsilon_1 + r_2\epsilon_2 + \cdots + r_m\epsilon_m < s_0 + s_1\epsilon_1 + s_2\epsilon_2 + \cdots + s_m\epsilon_m$$

ist, sofern $0 < \epsilon_1 \leq \delta$ und $0 < \epsilon_i \leq \delta\epsilon_{i-1}$ für alle $i = 2, \ldots, m$ ist.

(b) Beweisen Sie: Die Folge $(r_0, r_1, \ldots, r_m)$ ist genau dann lexikographisch kleiner als die Folge $(s_0, s_1, \ldots, s_m)$, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle $0 < \epsilon \leq \delta$ gilt:

$$r_0 + r_1\epsilon + r_2\epsilon^2 + \cdots + r_m\epsilon^m < s_0 + s_1\epsilon + s_2\epsilon^2 + \cdots + s_m\epsilon^m.$$