14. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Randomisierte Algorithmen — WiSe 2016/17

Wolfgang Mulzer, Paul Seiferth, Max Willert

Abgabe bis zum 6. Februar 2017, 12 Uhr, in den Briefkasten neben Raum 111
Dies ist das letzte Aufgabenblatt.

Aufgabe 1 st-Pfad in ungerichteten Graphen *10 Punkte*

Beweisen Sie detailliert, dass sich das st-Pfad-Problem in ungerichteten Graphen mit einem Monte-Carlo Algorithmus lösen lässt, der logarithmischen Platzbedarf und polynomielle Laufzeit benötigt.

Aufgabe 2 Random Walks in allgemeinen Graphen *20 Punkte*

Sei $G = (V, E)$ ein einfacher, zusammenhängender ungerichteter Graph mit n Knoten. Sei $V = \{1, \dots, n\}$, und für $i \in V$, sei d_i der Grad des Knoten i.

Sei A die Adjazenzmatrix von G, d.h., $A_{ij} = 1$, falls $\{i, j\} \in E$ ist, und $A_{ij} = 0$, sonst. Sei weiterhin D die Diagonalmatrix mit $D_{ii} = 1/d_i$, für $i = 1, \dots, n$ und $D_{ij} = 0$, für $i \neq j$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, sei D^α die Diagonalmatrix mit den Einträgen $(D^\alpha)_{ij} = (D_{ij})^\alpha$, für $i, j = 1, \dots, n$.

(a) Die Matrix $M = DA$ heißt *Random-Walk-Matrix* von G. Fixieren Sie $i, j \in V$ und $t \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie das folgende Zufallsexperiment: Wir beginnen in Knoten i. In jedem Schritt wählen wir zufällig gleichverteilt eine inzidente Kante des aktuellen Knoten. Wir folgen dieser Kante zum benachbarten Knoten. Dies wiederholen wir t mal. Sei p_{ij}^t die Wahrscheinlichkeit, dass wir im Knoten j aufhören.

Zeigen Sie: Es ist $p_{ij}^t = (M^t)_{ij}$.

(b) Sei $N = D^{1/2} A D^{1/2}$. Zeigen Sie: Die Matrix N verfügt über eine Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_n$ von Eigenvektoren. Außerdem ist der Vektor v_1 mit $v_{1i} = \sqrt{d_i/2|E|}$, für $i = 1, \dots, n$, Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Aus dem Satz von Perron-Frobenius folgt dann: der Eigenwert 1 ist einfach und alle Eigenwerte haben Betrag höchstens 1. Außerdem ist -1 genau dann Eigenwert, wenn G bipartit ist.

(c) Zeigen Sie: M ist diagonalisierbar und lässt sich schreiben als

$$M = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k D^{1/2} v_k v_k^T D^{-1/2},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und $v_1, \dots, v_n$ die Eigenwerte und Eigenvektoren von N sind. Dabei sei die Nummerierung so gewählt, dass $\lambda_1 = 1$ und $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ ist.

Hinweis: Führen Sie M auf N zurück. Verwenden Sie die Darstellung von N als Diagonalmatrix.

(d) Sei p_{ij}^t wie in (a). Zeigen Sie:

$$p_{ij}^t = \frac{d_j}{2|E|} + \sqrt{\frac{d_j}{d_i}} \sum_{k=2}^{n} v_{ki} v_{kj} \lambda_k^t$$

und

$$\left| p_{ij}^t - \frac{d_j}{2|E|} \right| \leq \sqrt{\frac{d_j}{d_i}} |\lambda_2|^t.$$

Hinweis: Sie dürfen verwenden: Es ist $\sum_{k=1}^{n} v_{ki} v_{kj} = 1$, falls $i = j$, und $\sum_{k=1}^{n} v_{ki} v_{kj} = 0$, sonst. Außerdem gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

(e) Was können Sie über die Konvergenz von Random Walks auf G sagen?