13. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Randomisierte Algorithmen — WiSe 2016/17

Wolfgang Mulzer, Paul Seiferth, Max Willert

Abgabe bis zum 30. Januar 2017, 12 Uhr, in den Briefkasten neben Raum 111

Aufgabe 1 Graphen und Eigenwerte *10 Punkte*

Sei $G = (V, E)$ ein d-regulärer ungerichteter Graph mit n Knoten. Sei A die Random-Walk Matrix von G.

(a) Angenommen, G ist zusammenhängend. Zeigen Sie: -1 ist Eigenwert von A genau dann, wenn G bipartit ist. Was können Sie über die Vielfachheit von -1 sagen?

(b) Zeigen Sie: Die Vielfachheit des Eigenwerts 1 ist genau die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G.

Aufgabe 2 Expandervermischungslemma *10 Punkte*

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender d-regulärer ungerichteter Graph. Sei $S, T \subseteq V$. Zeigen Sie, dass

$$\left| |E(S,T)| - \frac{d}{n}|S||T| \right| \leq d\lambda(G)\sqrt{|S||T|}$$

ist. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Sei A die Random-Walk Matrix für G. Seien $\lambda_1 = 1$, $\lambda(G) = |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ die Eigenwerte von A. Sei $\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_n$ eine zugehörige orthonormal-Basis von Eigenvektoren. Zeigen Sie zunächst, dass $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{z}_i \vec{z}_i^T$ ist. Seien dann $\vec{s}$ und $\vec{t}$ die charakteristischen Vektoren von S und T. Zeigen Sie, dass $|E(S,T)| = d \cdot \vec{s}^T A \vec{t}$ ist. Benutzen Sie die Darstellung von A und Ihr Wissen über das Spektrum von A, um das Ergebnis zu erhalten. Die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* könnte nützlich sein:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Aufgabe 3 Satz von Courant-Fisher *10 Punkte*

Beweisen Sie den Satz von Courant-Fisher. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle und symmetrische Matrix. Seien $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ die Eigenwerte von A (mit Wiederholungen), und sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine zughörige Orthonormalbasis von Eigenvektoren. Dann gilt für $k = 1, \ldots, n$:

$$\lambda_k = \max_{\substack{w \in \mathbb{R}^n \\ \|w\|=1, w \perp v_1, \ldots, v_{k-1}}} w^T A w$$