12. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Randomisierte Algorithmen

WiSe 2016/17

Wolfgang Mulzer, Paul Seiferth, Max Willert

Abgabe bis zum 23. Januar 2017, 12 Uhr, in den Briefkasten neben Raum 111

Aufgabe 1 Bedingte Erwartungswerte und Martingale *10 Punkte*

Zeigen Sie:

(a) Seien X, Y Zufallsvariablen. Dann gilt $\mathbf{E}[X \cdot Y] = \mathbf{E}[X \cdot \mathbf{E}[Y \mid X]]$.

(b) Sei $X_1, X_2, \dots$ ein Martingal. Dann gilt $\mathbf{E}[X_i] = \mathbf{E}[X_1]$ für alle $i \geq 0$.

(c) Sei $X_1, X_2, \dots$ ein Martingal bezüglich $Y_1, Y_2, \dots$. Dann ist $X_1, X_2, \dots$ ein Martingal.

Aufgabe 2 Lipschitz-Funktionen und Bedingte Erwartungswerte *10 Punkte*

In der Vorlesung haben wir folgendes bewiesen: Sei $f : \mathbb{R}^n \to R$ eine c-Lipschitz-Funktion und seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Setze

$$Z_0 = \mathbf{E}[f(X_1, \dots, X_n)]$$

und

$$Z_i = \mathbf{E}[f(X_1, \dots, X_n) \mid X_1, \dots, X_i],$$

für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt $|Z_i - Z_{i-1}| \leq c$, für $i = 1, \dots, n$.

Zeigen Sie, dass diese Aussage im Allgemeinen nicht gilt, wenn die X_i nicht unabhängig sind.

Aufgabe 3 Azuma-Ungleichung *10 Punkte*

Beweisen Sie mit dem Kantenenthüllungs-Martingal und der Azuma-Ungleichung, dass die Färbungszahl des Erdős-Renyi-Graphen $G_{n,p}$ stark um ihren Erwartungswert konzentriert ist.

Dabei ist die *Färbungszahl* die minimale Anzahl von Farben, mit der man die Knoten von $G_{n,p}$ färben kann, so dass bei keiner Kante die Endpunkte gleich gefärbt sind.