11. Aufgabenblatt zur Vorlesung

# Randomisierte Algorithmen — WiSe 2016/17

Wolfgang Mulzer, Paul Seiferth, Max Willert

**Abgabe** bis zum 16. Januar 2017, 12 Uhr, in den Briefkasten neben Raum 111

**Aufgabe 1** Voronoi Diagramme — *15 Punkte*

Sei $P \subset \mathbb{R}^2$ endlich mit (i) $|P| \geq 3$; (ii) keine vier Punkte von $P$ liegen auf einem gemeinsamen Kreis; und (iii) die Punkte von $P$ liegen nicht alle auf einer Geraden. Für $x \in \mathbb{R}^2$, setze $\mathrm{NN}(x) = \{p \in P \mid d(x,p) = \min_{q \in P} d(x,q)\}$. Wir definieren $\mathrm{VD}(P) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |\,\mathrm{NN}(x)| \geq 2\}$.

Den Elemente von $V(P) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid |\,\mathrm{NN}(v)| \geq 3\}$ heißen *Voronoi-Knoten.* Die Komponenten von $\mathrm{VD}(P) \setminus V(P)$ heißen *Voronoi-Kanten.* Die Komponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{VD}(P)$ heißen *Voronoi-Zellen.*

Zeigen Sie:

(a) Ein Punkt $v \in \mathbb{R}^2$ ist Voronoi-Knoten genau dann, wenn es eine geschlossene Kreisscheibe $D$ mit Mittelpunkt $v$ gibt, so dass $|D \cap P| = 3$ und $\mathring{D} \cap P = \emptyset$ ist. Jeder Voronoi-Knoten ist inzident zu genau drei Voronoi-Kanten.

(b) Seien $p, q \in P$. Der *Bisektor* $B_{pq}$ von $p$ und $q$ ist die Mittelsenkrechte der Strecke $pq$.

Jede Voronoi-Kante ist Teilmenge eines Bisektors $B_{pq}$. Für jeden Bisektor $B_{pq}$ gibt es höchstens eine Voronoi-Kante.

(c) Alle Voronoi-Zellen sind konvex.

**Aufgabe 2** Kleine Epsilon-Netze für Halbebenen — *15 Punkte*

Betrachten Sie den Range Space der *geschlossenen Halbebenen*, d.h., den Range Space $(\mathbb{R}^2, \mathcal{R})$ mit

$$\mathcal{R} = \{\{(x,y) \mid y \leq ax + b\} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\{(x,y) \mid y \geq ax + b\} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\{(x,y) \mid x \leq a\} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Sei $P \subset \mathbb{R}^2$, so dass keine drei Punkte in $P$ auf einer Geraden liegen. Sei $N_1 \subset P$ eine Teilmenge von $P$. Die *konvexe Hülle* von $N_1$, $\mathrm{conv}(N_1)$, ist die kleinste konvexe Menge, die $N_1$ enthält. Wir wissen, dass $\mathrm{conv}(N_1)$ ein konvexes Polygon ist, dessen Ecken Punkte aus $N_1$ sind. Seien $p, q \in N_1$ und $\ell_{pq}$ die Gerade durch $p$ und $q$. Dann ist $e = pq$ genau dann eine Kante von $\mathrm{conv}(N_1)$, wenn eine der beiden durch $\ell_{pq}$ begrenzten offenen Halbebenen keine Punkte aus $P$ enthält. Wir bezeichnen diese offene Halbebene als $h_e^-$, und schreiben $P_e = P \cap h_e^-$.

Benutzen Sie diese Definitionen und Fakten, um zu beweisen, dass der Range Space der geschlossenen Halbebenen lineare $\varepsilon$-Netze besitzt. Das heißt, für alle

$r \in \{1, \ldots, |P|\}$ existiert eine Teilmenge $N \subset P$, $|N| = O(r)$, so dass für alle $R \in \mathcal{R}$ mit $|P \cap R| \geq n/r$ gilt: $P \cap N \neq \emptyset$.

Gehen Sie dabei analog zum Beweis für Kreisscheiben aus der Vorlesung vor.

*Hinweis*: Bei Ihrer Analyse sollen Sie folgende Variante der Chazelle-Friedman Schranke verwenden. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $|P| = n$, und sei $p \in (0, 1]$ groß genug und $p' = p/2$. Sei $R \subseteq P$ eine zufällige Teilmenge mit $|R| = pn$ und $R' \subseteq P$ eine zufällige Teilmenge mit $|R'| = p'n$. Sei $(u, v) \in P^2$ und sei $e_{uv}$ die *gerichtete* Kante von $u$ nach $v$. Sei $h_{uv}$ die offene Halbebene links von $e_{uv}$. Seien $B_{uv} = P \cap h_{uv}$ und $b_{uv} = |B_{uv}|$. Dann existert eine Kontante $C$, so dass gilt

$$\mathbf{Pr}[e_{uv} \in \mathrm{conv}(R)] \leq Ce^{-\frac{pb_{uv}}{2}} \mathbf{Pr}[e_{uv} \in \mathrm{conv}(R')].$$

Dabei bedeutet $e \in \mathrm{conv}(R)$, dass die gerichtete Kante $e$ *im Uhrzeigersinn* auf der konvexen Hülle von $R$ vorkommt. Beweisen Sie diese Variante der Chazelle-Friedman Schranke und verwenden Sie sie in Ihrer Analyse.