8. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Randomisierte Algorithmen WiSe 2016/17

Wolfgang Mulzer, Paul Seiferth, Max Willert

Abgabe bis zum 12. Dezember 2016, 12 Uhr, in den Briefkasten neben Raum 111

Aufgabe 1 Unabhängigkeit *10 Punkte*

Seien $E_1, \dots, E_n, F$ Ereignisse. Zeigen Sie: Ist F von $E_1, \dots, E_n$ unabhängig, so gilt auch für jede Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq \{E_1, \dots, E_n, \overline{E_1}, \dots, \overline{E}_n\}$ mit $\mathbf{Pr}\left[\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E\right] > 0$, dass

$$\mathbf{Pr}[F] = \mathbf{Pr}\left[F \,\middle|\, \bigcap_{E \in \mathcal{E}} E\right]$$

ist.

Aufgabe 2 Das uniforme Kodierungslemma *10 Punkte*

Sei S eine endliche Menge. Ein *präfixfreier Code* für S ist eine Funktion $C : S \to \{0,1\}^*$, so dass für alle $s, t \in S$ gilt: $C(s)$ ist kein Präfix von $C(t)$ und $C(t)$ ist kein Präfix von $C(s)$.

(a) Sei $C : S \to \{0,1\}^*$ und $\ell \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$|\{s \in S \mid |C(s)| \leq \ell\}| \leq 2^\ell.$$

(b) Sei $C : S \to \{0,1\}^*$ ein präfixfreier Code, und sei $k \in \mathbb{N}$. Setze

$$B = \{s \in S \mid |C(s)| \leq \log |S| - k\}.$$

Beweisen Sie das *uniforme Kodierungslemma*: Sei $s \in S$ zufällig gleichverteilt. Dann gilt

$$\mathbf{Pr}[s \in B] \leq 2^{-k}.$$

Aufgabe 3 Läufe in binären Zeichenfolgen *10 Punkte*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $x \in \{0,1\}^n$ ein binäres Wort der Länge n. Ein *Lauf der Länge k* in x ist eine zusammenhänge Teilfolge von k Einsen in x, für $k \in \mathbb{N}$.

Benutzen Sie das uniforme Kodierungslemma, um eine möglichst gute obere Schranke für das Ereignis zu erhalten, dass ein zufällig gleichverteiltes binäres Wort der Länge n einen Lauf der Länge $\lceil \log n \rceil + s + 1$ enthält, für $s \in \mathbb{N}$.