7. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Randomisierte Algorithmen — WiSe 2016/17

Wolfgang Mulzer, Paul Seiferth, Max Willert

Abgabe bis zum 5. Dezember 2016, 12 Uhr, in den Briefkasten neben Raum 111

Aufgabe 1 Alternative Definition eines FPAUS — *10 Punkte*

Eine allgemeine Definition von FPAUS ist folgendermaßen. Gegeben eine Familie von endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega_x)_{x\in\{0,1\}^*}$ und eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $x \in \{0,1\}^*$ und für alle $\omega \in \Omega_x$ gilt, dass wir ω eindeutig mit $|x|^c$ Bits darstellen können.

Ein FPAUS für $(\Omega_x)_{x\in\{0,1\}^*}$ ist ein randomisierter Algorithmus, der bei Eingabe $x \in \{0,1\}^*$ und $\varepsilon > 0$ für $\mathrm{poly}(|x|, \log(1/\varepsilon))$ Schritte läuft, und dann ein zufälliges $\omega \in \Omega_x$ liefert, so dass für alle $S \subseteq \Omega_x$ gilt:

$$\left|\mathbf{Pr}[\omega \in S] - \frac{|S|}{|\Omega_x|}\right| \leq \varepsilon.$$

Eine alternative Definition geht so: Ein FPAUS' für $(\Omega_x)_{x\in\{0,1\}^*}$ ist ein randomisierter Algorithmus, der bei Eingabe $x \in \{0,1\}^*$ und $\varepsilon > 0$ für $\mathrm{poly}(|x|, \log(1/\varepsilon))$ Schritte läuft, und dann ein zufälliges $\omega \in \Omega_x$ liefert, so dass für alle $\sigma \in \Omega_x$ gilt:

$$\frac{|\mathbf{Pr}[\omega = \sigma] - 1/|\Omega_x||}{1/|\Omega_x|} \leq \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass jedes FPAUS' auch ein FPAUS ist. Was können Sie über die andere Richtung sagen?

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$\max_{S\subseteq\Omega_x}\left|\mathbf{Pr}[\omega \in S] - \frac{|S|}{|\Omega_x|}\right| = \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in\Omega_x}\left|\mathbf{Pr}[\omega = \sigma] - \frac{1}{|\Omega_x|}\right|$$

ist.

Aufgabe 2 Lovász Local Lemma — *10 Punkte*

(a) Beweisen Sie die allgemeine Form des Lovász Local Lemmas: Gegeben n Ereignisse $E_1, \dots, E_n$ und ein Abhängigkeitsgraph $G = (\{1, \dots, n\}, E)$ für diese Ereignisse. Angenommen, es gibt Zahlen $x_1, \dots, x_n \in [0, 1)$, so das für $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\mathbf{Pr}[E_i] \leq x_i \prod_{j:\{i,j\}\in E} (1 - x_j).$$

Dann ist

$$\mathbf{Pr}\left[\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E_i}\right] \geq \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i).$$

Hinweis: Zeigen Sie durch Induktion: Für $i = 1, \ldots, n$ und für alle $S \subseteq \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ gilt:

$$\mathbf{Pr}\left[E_i \mid \bigcap_{j \in S} \overline{E_j}\right] \leq x_i.$$

(b) Folgern Sie aus (a) die symmetrische Version des Local Lemmas aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 Anwendung des Lovász Local Lemmas *10 Punkte*

Sei V eine endliche Menge und $E \subseteq 2^V$ eine Teilmenge der Potenzmenge von V. Wir nennen $H = (V, E)$ einen *Hypergraph*. Der Hypergraph G heißt genau dann *zweifärbbar*, eine Funktion $\chi : V \to \{0, 1\}$ existiert, so dass für alle Hyperkanten $e \in E$ gilt: $\chi(e) = \{0, 1\}$.

Nehmen Sie an, dass jede Kante von H mindestens k Elemente besitzt und dass jede Kante einen nichtleeren Schnitt mit höchstens d anderen Kanten hat. Finden sie eine möglichst gute Beziehung zwischen k und d, die garantiert, dass H zweifärbbar ist.