6. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Randomisierte Algorithmen — WiSe 2016/17

Wolfgang Mulzer, Paul Seiferth, Max Willert

Abgabe bis zum 28. November 2016, 12 Uhr, in den Briefkasten neben Raum 111

Aufgabe 1 Coverage Algorithmus *10 Punkte*

Sei U ein endliches Universum und $S_1, \dots, S_m \subseteq U$. Wir kennen $|S_i|$, für $i = 1, \dots, m$, und wir möchten ein FPRAS für die Größe der Vereinigung $S = \bigcup_{i=1}^m S_i$ erhalten.

Wir nehmen an, dass wir für alle S_i effizient ein zufälliges Element $x \in S_i$ ziehen können. Wir nehmen auch an, dass wir für $x \in U$ effizient die Anzahl $c(x)$ der Mengen S_i bestimmen können, die x enthalten.

(a) Betrachten Sie folgendes Experiment: Wähle zufällig $I \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$\mathbf{Pr}[I = i] = \frac{|S_i|}{\sum_{j=1}^m |S_j|}.$$

Wähle dann ein zufälliges $x \in S_I$ und setze $Z = 1/c(x)$. Zeigen Sie, dass Z einen *Schätzer* für $|S| / \sum_{j=1}^m |S_j|$ liefert, d.h.,

$$\mathrm{E}[Z] = \frac{|S|}{\sum_{j=1}^m |S_j|}.$$

(b) Benutzen Sie (a), um einen Algorithmus zu entwickeln, der bei Eingabe $\varepsilon, \delta > 0$ einen Wert A ausgibt mit

$$\mathbf{Pr}[(1-\varepsilon)|S| \leq A \leq (1+\varepsilon)|S|] \geq 1 - \delta.$$

Die Laufzeit sollte polynomiell sein in m, $1/\varepsilon$ und $\log(1/\delta)$.

Hinweis: Benutzen Sie folgendes *Sampling Lemma*: Sei $\alpha > 0$ und Z eine Zufallsvariable mit $Z \in [\alpha, 1]$ und $\mathrm{E}[Z] = \mu$. Seien $\varepsilon, \delta \geq 0$ gegeben. Für $N = (4/\alpha\varepsilon^2)\ln(2/\delta)$ seien $Z_1, \dots, Z_N$ unabhängige Kopien von Z und $W = (1/N)\sum_{i=1}^N Z_i$. Dann gilt

$$\mathbf{Pr}[|W - \mu| > \varepsilon\mu] \leq \delta.$$

(c) Benutzen Sie (b), um das DNF-Counting Problem zu lösen: Gegeben eine aussagenlogische Formel $\Psi = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_m$ in disjunktiver Normalform, finde ein FPRAS für die Anzahl der erfüllenden Belegungen von Ψ.

Aufgabe 2 #RUCKSACK *20 Punkte*

Entwickeln Sie ein FPRAS für das Problem #RUCKSACK:

Gegeben: $w_1, \dots, w_n, B \in \mathbb{N}$ mit $w_i \leq B$, für $1 \leq i \leq n$.

Gesucht: $|\mathcal{S}|$, für $\mathcal{S} = \left\{ I \subseteq \{1, \dots, n\} \mid \sum_{i \in I} w_i \leq B \right\}$.

Gefragt ist also die Anzahl der zulässigen Rucksackfüllungen.

(a) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der #RUCKSACK in $O(nB)$ Zeit mit dynamischem Programmieren löst.

Hinweis: Betrachten Sie für $1 \leq i \leq n$, $1 \leq b \leq B$ die Anzahl $F(i, b)$ der zulässigen Rucksackfüllungen für die Gewichte $w_1, \dots, w_i$ und Gesamtkapazität b.

(b) Wir setzen $w'_i = \lfloor n^2 \frac{w_i}{B} \rfloor$. Sei

$$\mathcal{S}' = \left\{ I \subseteq \{1, \dots, n\} \mid \sum_{i \in I} w'_i \leq n^2 \right\}.$$

Zeigen Sie: (i) Wir können $|\mathcal{S}'|$ in $O(n^3)$ Zeit finden; (ii) es gilt $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$; und (iii) es gilt $|\mathcal{S}'| \leq (n+1)|\mathcal{S}|$.

Hinweis zu (iii): Zeigen Sie, dass $|\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}| \leq n|\mathcal{S}|$ ist. Überlegen Sie zunächst, dass für jede Rucksackfüllung $I \in \mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}$ gilt: das schwerste Element j in I hat $w_j > B/n$, also $w'_j \geq n$. Zeigen Sie dann, dass $I \setminus \{j\}$ in $\mathcal{S}$ liegt.

(c) Beschreiben Sie einen polynomiellen Zufallsalgorithmus, der ein zufällig gleichverteiltes Element aus $\mathcal{S}'$ liefert.

Hinweis: Erzeugen Sie $I \in \mathcal{S}'$ zufällig, indem Sie die Elemente $n, n-1, \dots, 1$ in dieser Reihenfolge durchgehen, und für jedes Element zufällig entscheiden, ob es in I enthalten sein soll. Benutzen Sie die Tabelle, die durch das dynamische Programm in (a) erstellt wurde, um die richtigen Wahrscheinlichkeiten zu finden.

(d) Benutzen Sie die Monte-Carlo Methode, um ein FPRAS für $|\mathcal{S}|$ zu entwickeln.

Aufgabe 3 Des Spielers Bankrott *freiwillig, 10 Zusatzpunkte*

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie den Pfad mit Knotenmenge $\{0, 1, 2, \dots, a+b\}$, nummeriert von links nach rechts. Nehmen Sie an, wir beginnen bei Knoten a und gehen in jedem Schritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ nach links oder nach rechts. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass wir den Knoten 0 vor dem Knoten $a+b$ erreichen.