5. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Randomisierte Algorithmen — WiSe 2016/17

Wolfgang Mulzer, Paul Seiferth, Max Willert

Abgabe bis zum 21. November 2016, 12 Uhr, in den Briefkasten neben Raum 111

Aufgabe 1 Kullback-Leibler Divergenz — *10 Punkte*

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt:

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Beweisen Sie die *Jensensche Ungleichung.* Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

(b) Seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_i, b_i \geq 0$, für $i = 1, \ldots, n$. Sei $a = \sum_{i=1}^n a_i$ und $b = \sum_{i=1}^n b_i$ Beweisen Sie die *Log-Summen-Ungleichung:*

$$\sum_{i=1}^n a_i \log \frac{a_i}{b_i} \geq a \log \frac{a}{b}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Jensensche Ungleichung für $f(x) = x \log x$.

(c) Zeigen Sie: Für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen P und Q auf n Elementen gilt $D_{\mathrm{KL}}(P \parallel Q) \geq 0$.

Aufgabe 2 Alternativer Beweis der Chernoff-Schranke — *10 Punkte*

In dieser Aufgabe betrachten wir Chvátals Beweis für eine Variante der Chernoff Schranke. Sei $B(n,p)$ die Zufallsvariable, welche die Erfolge in einer Folge von n unanbhängigen Bernoulli Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p zählt.

(a) Zeigen Sie: für alle $x \geq 1$ ist

$$\mathbf{Pr}[B(n,p) \geq k] \leq \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} x^{i-k}.$$

(b) Benutzen Sie den Binomialsatz, um eine geschlossene obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{Pr}[B(n,k) \geq k]$ zu erhalten.

(c) Finden Sie den eine bestmögliche Wahl für x.

(d) Folgern Sie: für $t \geq 0$ gilt

$$\mathbf{Pr}[B(n,p) \geq (p+t)n] \leq \left(\left(\frac{p}{p+t} \right)^{p+t} \left(\frac{1-p}{1-p-t} \right)^{1-p-t} \right)^{n}.$$

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 3 Laufzeit eines FPRAS *10 Punkte*

Nehmen Sie an, wir ändern die Definition von FPRAS leicht ab und fordern anstatt einer Laufzeit, die polynomiell in $1/\varepsilon$ ist, eine Laufzeit, die polynomiell in $\log(1/\varepsilon)$ sein muss.

(a) Zeigen Sie, dass aus der Existenz eines solchen FPRAS für ein #P vollständiges Problem folgt, dass wir jedes Problem in #P in Polynomialzeit lösen können.

(b) Was würde das für die Klassen P und NP bedeuten?