4. Aufgabenblatt zur Vorlesung

# Randomisierte Algorithmen — WiSe 2016/17

Wolfgang Mulzer, Paul Seiferth, Max Willert

**Abgabe** am 16. November 2016 im Tutorium

**Aufgabe 1** Der Lolli-Graph *10 Punkte*

Der *Lolli-Graph* besteht aus $2n-1$ Knoten $\{1,\dots,2n-1\}$. Die Knoten $\{1,\dots,n\}$ bilden einen vollständigen Graphen mit $n$ Knoten. Die Knoten $\{1, n+1,\dots,2n-1\}$ bilden einen Pfad der Länge $n$, in dieser Reihenfolge. Es gibt keine weiteren Kanten zwischen Knoten in $\{2,\dots,n\}$ und Knoten in $\{n+1,\dots,2n-1\}$.

Betrachten Sie den Random Walk auf dem Lolli-Graphen, der bei 1 beginnt und in jedem Schritt zu einem zufällig gleichverteilten Nachbarn des aktuellen Knoten geht. Geben Sie eine möglichst gute Schätzung für die erwartete Anzahl an Schritten an, bis der Random Walk den Knoten $2n-1$ erreicht.

**Aufgabe 2** Kuppeln *20 Punkte*

In der Vorlesung haben Sie die Methode des Kuppelns (Couplings) von Zufallsvariablen kennen gelernt. Wir betrachten ein weiteres Beispiel.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir haben ein Kartenspiel mit $n$ paarweise verschiedenen Karten. Wir führen den folgenden Schritt aus: Wähle eine zufällige Karte und bringe sie nach ganz oben. Wie oft müssen wir dies wiederholen, bis das Kartenspiel zufällig gemischt ist?

Wir definieren dazu zwei Folgen $X_1, X_2, \dots$ und $Y_1, Y_2, \dots$ von Zufallsvariablen. Die Werte der Zufallsvariablen sind Permutationen der Menge $\{1,\dots,n\}$. Die Zufallsvariablen sind auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega$ definiert. Ein Elementarereignis $\omega \in \Omega$ besteht aus einer zufällig gleichverteilten Permutation $\sigma$ und einer Folge $Z_1, Z_2, \dots$ von unabhängigen gleichverteilten Elementen aus $\{1,\dots,n\}$.

Wir setzen $X_1(\omega)$ auf die Ausgangspermutation des Kartenspiels, und $Y_1(\omega)$ auf die zufällige Permutation $\sigma$. Sei $i \geq 1$, und sei $k$ das $Z_i$-te Element in $X_i(\omega)$. Man erhält $X_{i+1}(\omega)$, indem man in $X_i(\omega)$ das Element $k$ an die erste Stelle bringt. Man erhält $Y_{i+1}(\omega)$, indem man in $Y_i(\omega)$ das Element $k$ an die erste Stelle bringen. Achtung: Wir benutzen beide male das gleiche Element.

(a) Zeigen Sie: Für jede feste Permutation $\tau$ und für jedes $i \geq 1$ gilt: $\mathbf{Pr}[Y_i = \tau] = 1/n!$.

(b) Zeigen Sie: Die Verteilung der $X_i$ entspricht der Verteilung, die unser Algorithmus zum Kartenmischen erzeugt.

(c) Begründen Sie: Wenn $X_i = Y_i$ ist, dann ist das Kartenspiel gemischt.

(d) Zeigen Sie: Die Länge des längsten gemeinsamen Präfix von $X_i$ und $Y_i$ ist monoton wachsend mit $i$.

(e) Zeigen Sie: Wenn die Länge des längsten gemeinsamen Präfix von $X_i$ und $Y_i$ genau $k$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich in einem Schritt erhöht, genau $(n-k)/n$. Folgern Sie: Die erwartete Anzahl an Schritten, bis sich das Präfix verlängert, ist $n/(n-k)$.

(f) Wie viele Schritte benötigt man im Erwartungswert, bis das Kartenspiel gemischt ist?