1. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Randomisierte Algorithmen — WiSe 2016/17

Wolfgang Mulzer, Paul Seiferth, Max Willert

Abgabe bis zum 28. Oktober 2016, 12 Uhr, in den Briefkasten neben Raum 111

Aufgabe 1 Maximum bestimmen — *10 Punkte*

Sei `A` ein Array mit $n \geq 1$ paarweise verschiedenen Zahlen. Betrachten Sie den folgenden Algorithmus, der das Maximum von `A` bestimmt.

```
max <- A[1]
for i := 2 to n do
    if A[i] > max then
        max <- A[i]    //*
return max
```

(a) Wie oft wird die Zeile (*) im schlimmsten Fall ausgeführt? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Nehmen Sie nun an, dass die Reihenfolge von `A` einer zufällig gleichverteilten Permutation entspricht. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass in Iteration $\texttt{i} = i$ der `for`-Schleife die Zeile (*) ausgeführt wird?

(c) Sei X_i, $i \in \{2, \dots, n\}$, die Indikatorvariable für das Ereignis, dass die Zeile (*) in Iteration $\texttt{i} = i$ ausgeführt wird. Was ist der Erwartungswert von X_i?

(d) Wie oft wird die Zeile (*) im Erwarungswert insgesamt ausgeführt?

(e) Geben Sie eine sinnvolle Schranke für die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zeile (*) höchstens $\sqrt{n}$ mal ausgeführt wird.

Aufgabe 2 Rucksack — *10 Punkte*

Beim Rucksackproblem haben wir n Gegenstände gegeben. Jeder Gegenstand hat ein *Gewicht* g_i und einen *Wert* w_i. Außerdem gibt es ein Maximalgewicht G. Alle Eingaben sind natürliche Zahlen.

Wir möchten eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ von Gegenständen finden, so dass der Gesamtwert $\sum_{i \in I} w_i$ maximal ist, unter der Nebenbedingung, dass das Maximalgewicht nicht überschritten wird, also $\sum_{i \in I} g_i \leq G$ gilt.

(a) Definieren Sie eine geeignete Entscheidungsvariante des Rucksackproblems und zeigen Sie, dass sie NP-vollständig ist.

Hinweis: Reduzieren Sie von SUBSET-SUM.

(b) Sei $W := \sum_{i=1}^{n} w_i$. Zeigen Sie, dass sich das Rucksackproblem in $O(nW)$ Schritten lösen lässt. Wieso ist das kein Widerspruch zu (a)?

(c) Sei $\varepsilon \geq 0$. Zeigen Sie, dass man in $\mathrm{poly}(n, 1/\varepsilon)$ Schritten eine Lösung für das Rucksackproblem finden kann, deren Wert mindestens $(1-\varepsilon)\mathrm{OPT}$ ist, wobei OPT der Wert einer optimalen Lösung ist.

   Hinweis: Runden Sie die Werte geeignet und verwenden Sie (b).

Aufgabe 3 Gewichteter Median *10 Punkte*

Sei $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ eine Menge von n paarweise verschiedenen Elementen aus einem total geordneten Universum. Seien w_1, w_2, …, w_n positive Gewichte, so dass das Element s_i Gewicht w_i hat. Es gelte $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Der *gewichtete Median* von S ist das Element $s_k \in S$ mit

$$\sum_{s_i < s_k} w_i \leq 1/2$$

und

$$\sum_{s_i > s_k} w_i < 1/2.$$

(a) Angenommen, Sie haben eine Funktion, die den gewichteten Median in Zeit $T(n)$ bestimmt. Zeigen Sie, wie man den (normalen) Median in Zeit $O(n) + T(n)$ finden kann.

   Hinweis: Wählen Sie die Gewichte geeignet.

(b) Zeigen Sie, wie man den gewichteten Median in $O(n \log n)$ Zeit berechnen kann.

   Hinweis: Verwenden Sie einen geeigneten Sortieralgorithmus.

(c) Zeigen Sie, wie man den gewichteten Median in $O(n)$ Zeit finden kann, wenn ein Linearzeitalgorithmus zum Finden des normalen Medians zur Verfügung steht.