Informatik A, WS 2016/17 — Klausur

Abgabe bis Freitag, 17. Februar 2017, 9:45 Uhr (90 Minuten, 40 Punkte)

1. Prädikatenlogik, 10 Punkte

   Wir bezeichnen mit L_n die Menge der Listen $x = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]$ vom Typ `[Int]` mit Länge n und mit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

   (a) (3 Punkte) Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden dreistelligen Prädikats f in Worten.

   $$\begin{aligned} f(x, y, z) :\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} \colon x \in L_m \ \wedge\ y \in L_n \ \wedge\ z \in L_{m+n} \\ \wedge\ \forall i \in \mathbb{Z} \colon \big((0 \le i < m \to x_i = z_i) \ \wedge\ (0 \le i < n \to y_i = z_{m+i})\big) \end{aligned}$$

   (b) (2 Punkte) Geben Sie ein Beispiel von Listen x, y, z, wo das Prädikat $f(x, y, z)$ erfüllt ist, und ein Beispiel, wo es nicht erfüllt ist,

   (c) (2 Punkte) Drücken Sie den Inhalt des Prädikats $f(x, y, z)$ in Haskell-Notation aus. Sie können dabei unendliche Listen außer Acht lassen.

   (d) (Zusatzfrage, 2 Zusatzpunkte) Wie wirkt sich die Möglichkeit unendlicher Listen auf die Antwort der vorigen Frage aus?

   (e) (3 Punkte) Welche Variablen kommen im folgenden Ausdruck frei vor?

   $$\forall i \in \mathbb{Z} \colon \big((0 \le i < m \to x_i = z_i) \ \wedge\ \exists j \in \mathbb{Z} \colon (0 \le j < n \wedge y_j = z_i)\big)$$

2. Programmieren, 10 Punkte

   (a) Listen ausdünnen, 3 Punkte

   Schreiben Sie eine Funktion `jedesZweite`, die jedes zweite Element aus einer Liste streicht, beginnend mit dem zweiten Element, und nur die Elemente an den ungeraden Stellen behält. Beispiele:

   ```
   jedesZweite [4,2,7,8,9,-1,7,2] = [4,7,9,7]
   jedesZweite "Asternplatz" = "Atrpaz"
   ```

   Überlegen Sie selbst, welchen Datentyp die Funktion hat, und schreiben Sie eine Typdeklaration.

   (b) Zinsberechnung, 3 Punkte

   Die XYZ-Bank zahlt für Anlagebeträge bis zu einem Schwellwert s von 20.000 Euro $p_1 = 3\,\%$ Zinsen pro Jahr; für darüberhinausgehende Beträge zahlt sie nur $p_2 = 1\,\%$ Zinsen. Schreiben Sie eine Funktion `zinsen:: Float -> Float -> Float -> Float -> Float`, sodass der Aufruf

   ```
   zinsen s p1 p2 x
   ```

   den Zinsbetrag für einen Anlagebetrag von `x` Euro berechnet. Für das Beispiel müsste man also `zinsen 20000 3.0 1.0 x` aufrufen. Beispiele:

   ```
   zinsen 20000 3.0 1.0  1000 =  30
   zinsen 20000 3.0 1.0 20000 = 600
   zinsen 20000 3.0 1.0 21000 = 610
   zinsen 20000 3.0 1.0 22000 = 620
   ```

   Geben Sie wie immer für alle Hilfsfunktionen Typdeklarationen an.

(c) Kontobewegungen, 4 Punkte
Schreiben Sie eine Funktion

`endstand :: Float -> [Kontobewegung] -> Float`,

die ausgebend von einem Ausgangskontostand und einer Liste von Kontobewegungen den Endstand berechnet. Kontobewegungen sind so definiert:

```
data Kontobewegung = Einzahlung Float
                   | Auszahlung Float
                   | Zinszahlung {s, p1, p2 :: Float}
```

Die Werte bei einer `Zinszahlung` sind die ersten drei Parameter der Funktion `zinsen` von Aufgabe (b). Bei einer `Zinszahlung` sollen die Zinsen auf den *augenblicklichen* Kontostand berechnet und gutgeschrieben werden.

3. Strukturelle Induktion, 10 Punkte

Beweisen Sie die Gleichung

`map f (a ++ b) = map f a ++ map f b`

für endliche Listen a und b unter Verwendung folgender Definitionen:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f []     = []                    -- map.1
map f (x:xs) = f x : map f xs        -- map.2

(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]     ++ ys  = ys                   -- (++.1)
(x:xs) ++ ys  = x : (xs ++ ys)       -- (++.2)
```

Begründen Sie jeden Schritt, und geben Sie an, welche Definitionsgleichung (z. B. `(++.1)` oder `map.2`) oder welche anderen Eigenschaften Sie verwenden.

(a) (Zusatzfrage, 2 Zusatzpunkte) Ist die oben definierte Funktion `map` strikt im ersten Argument? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) (Zusatzfrage, 2 Zusatzpunkte) Ist sie strikt im zweiten Argument? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Entwurf eines Schaltnetzes, 10 Punkte

Gesucht ist ein Schaltnetz mit drei Eingängen $a, b, c \in \{0, 1\}$ und zwei Ausgängen $u, v \in \{0, 1\}$. Der Ausgang u soll genau dann **0** sein, wenn alle drei Eingänge den gleichen Wert haben. Der Ausgang v ist genau dann **1**, wenn die Zahl $4a + 2b + c$ mindestens 3 ist.

(a) (4 Punkte)
Beschreiben Sie die Ausgänge u und v durch logische Ausdrücke.

(b) (6 Punkte) Konstruieren ein Schaltnetz und zeichnen Sie es.
Verwenden Sie dabei die DIN-Symbole für die Gatter. Gatter mit mehr als zwei Eingängen sind nicht erlaubt.
Schreiben Sie zum Ausgang jedes Gatters (außer zu u und v) einen Booleschen Ausdruck in den Eingabevariablen, der den Wert charakterisiert.