

Informatik A, WS 2016/17 — 11. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 13. Januar 2017, 12:00 Uhr, in die Fächer der Tutor/inn/en

62. Prädikatenlogik, Belegungen, 10 Punkte

Eine Funktion $b:U \rightarrow \{w, f\}$ heißt eine *Belegung* eines Booleschen Ausdrucks F , wenn U eine Variablenmenge ist, die alle Variablen enthält, die in F vorkommen.

Für zwei Belegungen $b, b':U \rightarrow \{w, f\}$ und eine Variable $x \in U$ ist das Prädikat $\text{diff}(b, b', x)$ folgendermaßen definiert:

$$\text{diff}(b, b', x) :\Leftrightarrow b \text{ und } b' \text{ unterscheiden sich nur in der Variablen } x.$$

Formulieren Sie diese Definition als prädikatenlogische Formel. Verwenden Sie nur die Prädikate $\in, =, \neq, \subseteq$, und das dreistellige Prädikat $K(h, A, B)$, das besagt, dass h eine Funktion von A nach B ist. (Sie können für dieses Prädikat auch die konventionelle Schreibweise $h: A \rightarrow B$ verwenden.) Die Wahrheitswerte heißen w und f .

63. Fibonacci-Zahlen, vollständige Induktion, 10 Punkte

(a) B_n sei die Anzahl der Additionen, die bei der Berechnung `fibonacci n` mit der ursprünglichen Funktion `fibonacci` aus der Vorlesung vom 14. Dezember 2016 ausgeführt werden.

Schreiben Sie eine rekursive Definition für B_n .

(b) Bestimmen Sie die Werte B_0, B_1, \dots, B_{10} .

(c) Formulieren Sie eine Vermutung, wie die Folge B_n mit den Fibonacci-Zahlen zusammenhängt.

(d) Beweisen Sie diese Vermutung durch vollständige Induktion.

(e) (Zusatzfrage, 0 Punkte) Geben Sie eine einfache Erklärung für den Zusammenhang.

64. Schaltkreise, 0 Punkte

Konstruieren und zeichnen Sie einen logischen Schaltkreis für den Ausdruck $(A \wedge C) \vee (\neg B)$, der nur NAND-Elemente verwendet.

65. Programmieraufgabe: Gleitkommazahlen, Rundungsfehler, 10 Punkte

Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{n=1}^{10^6} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{(10^6)^2}$$

(a) mit `Float`, (b) mit `Double`.

(c) Wenn man n gegen unendlich gegen lässt, dann strebt die Summe gegen den Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$ (die Eulersche Reihe). Wie weit sind die Ergebnisse aus (a) bzw. (b) vom exakten Grenzwert entfernt?

(d) Berechnen Sie die Differenz zwischen den Ergebnissen aus (a) und (b).

(e) Wiederholen Sie die gesamte Aufgabe mit 10^7 statt 10^6 .

66. Strukturelle Induktion, 0 Punkte

Beweisen Sie `map (f . g) = map f . map g`, indem Sie die Gleichung

$$\text{map } (f . g) \text{ as} = (\text{map } f . \text{map } g) \text{ as}$$

für alle Listen `as` durch strukturelle Induktion nach `as` beweisen.