12. Aufgabenblatt zur Vorlesung

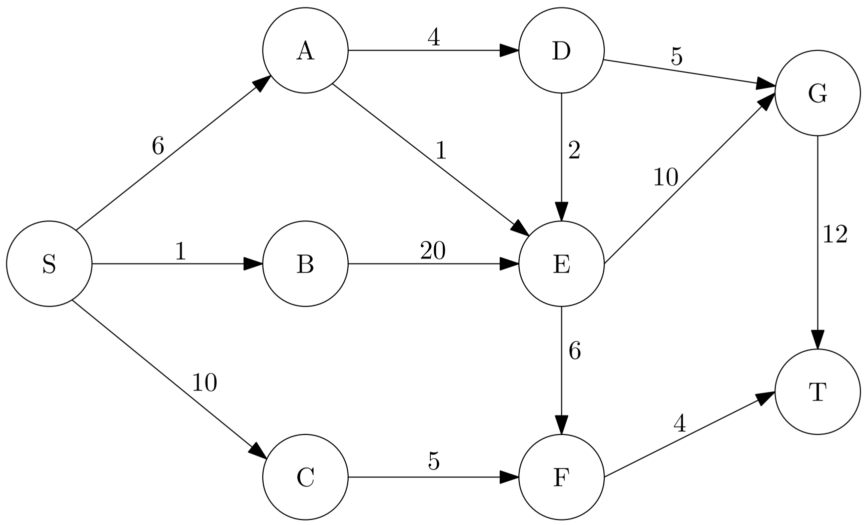
Höhere Algorithmik WiSe 2016/17

Wolfgang Mulzer, Boris Klemz

Abgabe bis zum 27. Januar 2017, 12 Uhr, in den Briefkasten neben Raum 111
Dies ist das vorletzte reguläre Aufgabenblatt.

Aufgabe 1 Netzwerkfluss *10 Punkte*

Betrachten Sie das folgende Flussnetzwerk G.



Benutzen Sie den Algorithmus von Ford und Fulkerson, um einen Maximum-Fluss von S nach T und einen Minimum-S-T-Schnitt in G zu finden. Zeigen Sie die einzelnen Schritte.

Aufgabe 2 Flüsse, Paarungen, Knotenüberdeckungen *10 Punkte*

(a) Sei G ein Flussnetzwerk, in dem alle Kapazitäten ganzzahlig sind. Beweisen Sie: es existiert ein Maximum-Fluss f^* für G, der nur ganzzahlige Werte annimmt. Zeigen Sie auch, dass man f^* in Polynomialzeit berechnen kann.

(b) Sei $H = (V, E)$ ein ungerichteter bipartiter Graph. Eine *Paarung* in H ist eine Menge $M \subseteq E$, so dass keine zwei Kanten in M einen gemeinsamen Endpunkt haben. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der eine größtmögliche Paarung in H bestimmt. Was ist die Laufzeit?

Hinweis: Definieren Sie ein geeignetes Flussnetzwerk und benutzen Sie (a).

(c) Sei $H = (V, E)$ ein ungerichteter bipartiter Graph. Eine *Knotenüberdeckung* für H ist eine Menge $C \subseteq V$ von Knoten, so dass jede Kante $e \in E$ zu mindestens einem Knoten in C inzident ist. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der eine kleinstmögliche Knotenüberdeckung für H findet.

Hinweis: Benutzen Sie Ihr Flussnetzwerk aus (b) und finden Sie einen Zusammenhang zwischen Schnitten und Knotenüberdeckungen.

Aufgabe 3 Kantenzusammenhang *10 Punkte*

Der *Kantenzusammenhang* eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist die kleinste Zahl k an Kanten, die entfernt werden müssen, damit G nicht zusammenhängend ist.

Zeigen Sie, dass man den Kantenzusammenhang von G durch Berechnung der maximalen Flüsse in höchstens $|V|$ Netzen mit jeweils $O(|V|)$ Knoten und $O(|E|)$ Kanten bestimmen kann.