1. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Höhere Algorithmik WiSe 2016/17

Wolfgang Mulzer, Boris Klemz

Abgabe bis zum 28. Oktober 2016, 12 Uhr, in den Briefkasten neben Raum 111

Aufgabe 1 O-Notation *10 Punkte*

Ordnen Sie die folgenden Funktionen so in einer Reihe $g_1, g_2, \ldots, g_{10}$ an, dass $g_i \in \Omega(g_{i+1})$ für $i = 1, \ldots, 9$ gilt. Geben Sie auch an, wenn sogar $g_i = \Theta(g_{i+1})$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz (wir schreiben $\log n$ für $\log_2 n$).

$$\begin{array}{lllll} (\sqrt{2})^{\log n}, & n^2, & (\lceil \log n \rceil)!, & \log^2 n, & 2^{(2^n)}, \\ n^{\frac{1}{\log n}}, & n^{\log\log n}, & \ln n, & 2^n, & 4^{\log n}. \end{array}$$

Aufgabe 2 Sammelbilder *10 Punkte*

Der nächste Harry-Potter-Spinoff steht kurz bevor. Daher gibt es in jeder Bircher-Müslipackung einen Aufkleber mit dem Bild eines Zauberlehrlings. Wir nehmen an, dass es insgesamt n verschiedene Sammelbilder gibt und dass jede neue Müslipackung ein zufällig gleichverteiltes Bild enthält. Wir wollen wissen, wie viele Müslipackungen wir kaufen müssen, bis unsere Sammlung vollständig ist.

Sei also X die Zufallsvariable, welche die Anzahl der benötigten Müslipackungen darstellt. Wir wollen den Erwartungswert $\mathrm{E}[X]$ berechnen.

(a) Wir unterteilen den Sammelprozess in *Runden*. Jede Runde dauert so lange, bis wir ein Sammelbild erhalten, das bisher noch nicht in unserem Besitz war. Am Ende der ersten Runde haben wir also ein Sammelbild, nach der zweiten Runde sind es zwei verschiedene Sammelbilder, usw. Die *Länge* einer Runde ist die Anzahl der Packungen, die wir im Laufe der Runde kaufen müssen.

Sei X_i die Zufallsvariable, welche die Länge der i-ten Runde darstellt. Zeigen Sie, dass $\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i]$ ist.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{E}[X_i]$.

Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Verteilung.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{E}[X] = O(n \log n)$ ist.

Hinweis: Es gilt $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = O(\log n)$.

Bitte wenden

Aufgabe 3 Leitern und Vasen *10 Punkte*

Sie besitzen eine Leiter mit n Sprossen sowie eine wertvolle Ming-Vase. Die Sprossen der Leiter sind von unten nach oben mit den Zahlen 1 bis n nummeriert. Sie wissen, dass eine Sprosse $z \in \{0, \ldots, n\}$ existiert, für die gilt: Lässt man die Vase von Sprosse 1 bis z fallen, so bleibt sie ganz; lässt man die Vase von Sprosse $z + 1$ bis n fallen, so geht sie kaputt. Ihre Aufgabe ist es, die Sprosse z zu bestimmen.

(a) Beschreiben Sie ein Verfahren, um z mit Hilfe einer *Testvase* zu bestimmen. Sie können die Testvase von einer beliebigen Leitersprosse fallen lassen. Ist die Nummer der Sprosse kleiner oder gleich z, so bleibt die Testvase ganz; ist sie größer als z, so geht die Testvase kaputt. Sobald die Testvase kaputt ist, kann man sie nicht mehr benutzen.

Ihr Verfahren soll immer das richtige z bestimmen und dabei mit einer Testvase auskommen. Wie oft müssen Sie die Testvase fallen lassen?

(b) Jetzt stehen Ihnen *zwei* Testvasen zur Verfügung. Wenn die erste Testvase kaputt ist, können Sie die zweite verwenden. Wenn beide Testvasen kaputt sind, können Sie keine weiteren Versuche mehr durchführen.

Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung von z, das immer funktionert und nur $O(\sqrt{n})$ Fallversuche benötigt.

(c) Nun haben Sie k Testvasen. Zeigen Sie, wie man z mit $O(kn^{1/k})$ Fallversuchen bestimmen kann. Was passiert für $k = \log n$?