4. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Informatik A

WiSe 2015/16

Wolfgang Mulzer

Abgabe am 17. November 2015 bis 12 Uhr in die Tutorenfächer

Aufgabe 1 Resolutionskalkül I *10 Punkte*

(a) Man teste mit dem Resolutionskalkül, ob die folgende Boolesche Formel eine Tautologie ist.

$$t_1 = \neg x \vee (w \wedge \neg x) \vee (x \wedge \neg w) \vee (y \wedge z \wedge x) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (w \wedge \neg z \wedge x).$$

(b) Ist der folgende Term erfüllbar? Verwenden Sie den Resolutionskalkül!

$$t_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge \neg x_3.$$

(c) Ist der folgende Term eine Tautologie? Verwenden Sie den Resolutionskalkül!

$$t_3 = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_3) \vee \neg x_2.$$

(d) Zeigen Sie mittels Resolutionsmethode, dass $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ eine Folgerung ist aus der Klauselmenge

$$t_4 = \{\{\neg x_1, x_2\}, \{\neg x_2, x_3\}, \{x_1, \neg x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$$

ist.

Aufgabe 2 Resolutionskalkül II *10 Punkte*

In dieser Aufgaben fixieren wir die Variablenmenge $V_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

(a) Wie viele mögliche Klauseln kann es für V_n geben?

(b) Sei nun $n \geq 3$. Geben Sie ein Beispiel für eine Klauselmenge über V_n mit Klauseln der Länge 3, für die der Resolutionskalkül eine Klausel der Länge n erzeugen kann. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Was passiert, wenn alle Klauseln die Länge 2 haben? Wie viele Klauseln können dann bei Anwendung des Resolutionskalküls maximal entstehen? Was folgt daraus über die Anzahl der Resolutionsschritte?

Aufgabe 3 Quantoren *10 Punkte*

(a) Schreiben Sie die folgenden Formeln in Negationsnormalform, das heißt, die verwendeten Negationen beziehen sich nur auf atomare Teilformeln und es werden außer den Quantoren nur die Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$ benutzt. Außerdem soll die Formel in Pränexform sein, also alle Quantoren vorne stehen.

(i) $\neg\forall x\ \exists y\ (P(x,y) \wedge Q(x,y) \wedge R(x,y))$.

(ii) $\neg\forall x\ (\exists y\ (P(x,y) \Rightarrow Q(x,y)) \wedge \exists z\ R(x,z))$.

(b) Wir betrachten die folgende Aussageform: $Q(x,y,z) : x \cdot y = z$. Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen und begründen Sie Ihre Antworten:

(i) $\forall z \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z} : Q(x,y,z)$.

(ii) $\exists x \in \mathbb{Q}\ \forall z \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{Q} : Q(x,y,z)$.